Θεωρία παιγνίων

Δημήτρης Χριστοφίδης

Έκδοση 1η: Παρασκευή 3 Απριλίου 2015.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Δυο άτομα παίζουν μια παραλλαγή του σκακιού όπου σε κάθε βήμα ο κάθε παίκτης κάνει δύο κανονικές κινήσεις. Να δειχθεί ότι ο πρώτος παίκτης δεν χάνει.

Λύση. Ας υποθέσουμε πως ο δεύτερος παίκτης έχει στρατηγική νίκης. Ο πρώτος παίκτης μετακινεί τον ίππο του και μετά τον επιστρέφει πίσω. Οπότε τώρα γίνεται δεύτερος παίκτης και άρα έχει και αυτός στρατηγική νίκης, άτοπο.

Σχόλιο. Το επιχείρημα ονομάζεται στα αγγλικά strategy stealing argument δηλαδή επιχείρημα κελψίματον στρατηγικής. Είναι αρκετά χρήσιμο σε προβλήματα θεωρίας παιγνίων.

Παρόλο που δείξαμε ότι ο πρώτος παίκτης δεν χάνει, ουσιαστικά δεν έχουμε ιδέα για το πως πρέπει να παίξει ώστε να μην χάσει.

Παράδειγμα 2. Δύο παίκτης τοποθετούν νομίσματα του ενός σεντ σε ένα κυκλικό τραπέζι. Κάθε νέο νόμισμα δεν πρέπει να αγγίζει κάποιο παλιό νόμισμα και επιπλέον τα παλιά νομίσματα απαγορεύεται να μετακινηθούν. Αν κάποιος παίκτης δεν μπορεί να τοποθετήσει ένα νόμισμα χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης. Αρχικά τοποθετεί ένα νόμισμα ακριβώς στο κέντρο του τραπεζιού. Μετά από κάθε κίνηση του δεύτερου παίκτη ο πρώτος τοποθετεί ένα νόμισμα διαμετρικά αντίθετα του νομίσματος που έβαλε ο δεύτερος. Μετά από κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη η τοποθέτηση των νομισμάτων είναι απολύτως συμμετρική οπότε ο πρώτος παίκτης μπορεί όντως να ακολουθήσει αυτήν την στρατηγική.

Σχόλιο. Συχνά η συμμετρία του παιγνιδιού μας βοηθάει στην κατασκευή στρατηγικής.

Παράδειγμα 3. Έχουμε μια ορθογώνια 5×8 σοκολάτα αποτελούμενη από 40 τετραγωνάκια. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε βήμα ο παίκτης μπορεί να κόψει την σοκολάτα κατά μήκος μιας από τις ευθείες που είναι παράλληλες με τις πλευρές τις σοκολάτας. Π.χ. ο πρώτος παίκτης μπορεί να κόψει την σοκολάτα σε δύο κομμάτια, ένα 5×3 και ένα 5×5. Ο δεύτερος παίκτης μπορεί στην κίνησή του ενα επιλέξει π.χ. το 5×3 και να το κόψει στα 1×3 και 4×3 κ.τ.λ.

Αν κάποιος παίκτης δεν μπορεί να κάνει κάποιο κόψιμο τότε χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Όπως και να παίξουν κερδίζει ο πρώτος παίκτης! Μετά από κάθε κίνηση του πρώτου παίκτη ο αριθμός των κομματιών είναι άρτιος ενώ μετά από κάθε κίνηση του δεύτερου παίκτη ο αριθμός των κομματιών είναι περιττός. Στο τέλος ο αριθμός των κομματιών είναι 40 που είναι άρτιος. Άρα τελευταίος έπαιξε ο πρώτος παίκτης.

Σχόλιο. Οι αναλλοίωτες βοηθούν συχνά στην θεωρία παιγνίων.

Παράδειγμα 4. Έχουμε μια στοίβα με 2015 νομίσματα. Δυο παίκτες αφαιρούν εναλλάξ από 1 εως 5 νομίσματα από την στοίβα. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης. Αρχικά αφαιρεί 5 νομίσματα ώστε να μείνουν στην στοίβα ακριβώς 2010 νομίσματα. Ακολούθως όποτε ο δεύτερος παίκτης αφαιρεί k νομίσματα, ο πρώτος αφαιρεί $6-k$ (επιτρέπεται από τους κανόνες). Ο αριθμός των νομισμάτων μετά από κίνηση του πρώτου παίκτη θα είναι πολλαπλάσιο του 6 ενώ μετά από κίνηση του δεύτερου παίκτη δεν θα είναι πολλαπλάσιο του 6. Άρα ο πρώτος παίκτης είναι ο παίκτης που θα αφαιρέσει τα τελευταία νομίσματα. Στην επόμενη κίνηση ο δεύτερος παίκτης δεν μπορεί να παίξει και χάνει.

Σχόλιο. Εδώ βοηθάει να ελέγξουμε μικρότερες περιπτώσεις ώστε να δούμε τι συμβαίνει. Μπορούμε να ξεκινήσουμε ένα κατάλογο ως εξής

1	I
2	I
3	I
4	I
5	I
6	II
7	I

Στην αριστερή στήλη έχουμε τον αριθμό των νομισμάτων και στην δεξιά στήλη γράφουμε ποιος κερδίζει. (Συμβολίζουμε με I τον πρώτο παίκτη και με II τον δεύτερο.) Πως μπορούμε να συμπληρώσουμε την όγδοη γραμμή; Όταν παίξει ο πρώτος παίκτης μετά θα μείνουν λιγότερα νομίσματα, έστω k, και θα παίζει δεύτερος. Οπότε ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν και μόνο αν μπορεί να πάει σε μια γραμμή με k νομίσματα η οποία είναι νίκη για τον δεύτερο παίκτη. Οι επιλογές του πρώτου παίκτη καταλήγουν στα $3, 4, 5, 6$ και 7. Από αυτά το 6 είναι νίκη για τον δεύτερο παίκτη. Οπότε τα 8 νομίσματα είναι νίκη για τον πρώτο παίκτη.

Συνεχίζοντας τον πίνακα υποψιαζόμαστε ότι έχουμε νίκη για τον δεύτερο παίκτη αν και μόνο αν ο αριθμός των νομισμάτων είναι πολλαπλάσιο του 6. Από την στιγμή που το βρήκαμε αυτό δεν είναι δύσκολο να το αποδείξουμε.

Αυτή η τεχνική δουλεύει γενικά και για άλλα παιγνίδια αν και μερικές φορές δουλεύει μόνο θεωρητικά μιας και αρκετές φορές η πολυπλοκότητα της ανάλυσης είναι τεράστια. Π.χ. θεωρητικά ακόμη και το σκάκι μπορεί να επιλυθεί έτσι και να ξέρουμε για κάθε θέση αν είναι νίκη για τον πρώτο παίκτη, ισοπαλία ή νίκη για τον δεύτερο παίκτη. Πρακτικά όμως ακόμη και οι ταχύτεροι ηλεκτρονικοί υπολογιστές είναι πολύ μακριά από το να μπορούν να κάνουν αυτήν την ανάλυση.

Επίσης προσοχή στο ότι την ανάλυση την κάνουμε πάντα από το τέλος. Αν και εδώ φαίνεται ότι την κάνουμε από την αρχή αφού ξεκινάμε από 1,2,3 νομίσματα κ.τ.λ., η ανάλυση ουσιαστικά είναι από το τέλος. Στην αρχή έχουμε περισσότερα νομίσματα και στο τέλος λιγότερα.

Πάντα λοιπόν ξεκινάμε από τις τελικές θέσεις που ξέρουμε ποιος κερδίζει και προχωράμε προς τα πίσω.

Παράδειγμα 5.

Έχουμε έξι σημεία στο επίπεδο ανά τρία μη συνευθειακά. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Ο πρώτος παίρνει δυο σημεία που δεν έχουν ακόμη ενωθεί με ευθύγραμμο τμήμα και τα ενώνει με ένα μπλε ευθύγραμμο τμήμα. Ο δεύτερος παίκτης κάνει το ίδιο μόνο που χρησιμοποιήθει μπλε ευθείες. Νικητής είναι ο παίκτης που θα σχηματίσει πρώτος ένα τρίγωνο του χρώματός του. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Από strategy stealing ο πρώτος παίκτης δεν χάνει. Οπότε πρέπει να ελέγξουμε αν μπορεί να κερδίσει ή αν ο δεύτερος παίκτης μπορεί να φέρει ισοπαλία.

Θα δείξουμε ότι όπως και να παίξουν ποτέ δεν μπορεί να έρθει ισοπαλία. Οπότε κερδίζει σίγουρα ο πρώτος παίκτης.

Θεώρημα: Αν έχουμε 6 σημεία στον χώρο και χρωματίσουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν κόκκινα ή μπλε τότε θα έχουμε ένα μονοχρωματικό τρίγωνο.

Απόδειξη: Το πρώτο σημείο είναι ενωμένο με πέντε άλλα. Χωρίς βλάβης της γενικότητας με τα σημεία A_2, A_3, A_4 είναι ενωμένο με μπλε τμήματα. Αν κάποιο από τα A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 είναι μπλε τότε έχουμε ένα μπλε τρίγωνο. Αν όλα είναι κόκκινα τότε έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο. □

Σχόλιο. Μερικές φορές χρειάζεται να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να συμβεί η ισοπαλία. Το θεώρημα που χρησιμοποιήσαμε είναι μέρος της θεωρίας Ramsey.

Παράδειγμα 6. Δυο παίκτες επιλέγουν σημεία ενός 5×5 πίνακα. Ο πρώτος παίκτης τα χρωματίζει μπλε και ο δεύτερος κόκκινα. Ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν σχηματίσει μια ευθεία οριζόντια, κάθετη ή διαγώνια με 5 μπλε σημεία. Αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Να δειχθεί ότι ο δεύτερος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Ο δεύτερος παίκτης χρησιμοποιεί τον πιο κάτω πίνακα:

1	3	3	8	2
7	10	12	7	4
6	11		11	4
6	9	12	8	9
2	10	5	5	1

Όποτε ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα τετράγωνο με αριθμό n ο δεύτερος παίκτης επιλέγει το άλλο. Αν ο πρώτος παίκτης επιλέξει το κεντρικό τετράγωνο τότε ο δεύτερος παίζει αυθαίρετα. Παίζει επίσης αυθαίρετα αν σε κάποια φάση ο πρώτος παίκτης επιλέξει ένα τετράγωνο με αριθμό n με το άλλο τετράγωνο να έχει ήδη επιλεγεί από τον δεύτερο παίκτη.

Επειδή κάθε ευθεία που κερδίζει έχει δυο τετράγωνα του ίδιου χρώματος, ο πρώτος παίκτης δεν μπορεί να επιλέξει όλα τα σημεία της. Άρα ο δεύτερος παίκτης όντως κερδίζει.

Σχόλιο. Η στρατηγική που χρησιμοποίησε ο δεύτερος παίκτης ονομάζεται «στρατηγική ταιριάσματος» (pairing strategy).

Για να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την στρατηγική αρκεί να χωρίσουμε ένα υποσύνολο των σημείων σε ζεύγη ώστε κάθε ευθεία που κερδίζει να έχει τουλάχιστον ένα ζεύγος.

Εδώ ϑα μπορούσαμε να το δείξουμε και διαφορετικά αλλά μάλλον με αρκετή δυσκολία στην εξήγηση της στρατηγικής.

Ασκήσεις

(1) Έχουμε δυο στοίβες με a και b νομίσματα αντίστοιχα. Σε κάθε βήμα ένας παίκτης επιτρέπεται να αφαιρέσει όσα νομίσματα ϑέλει (αλλά τουλάχιστον ένα) από όποια στοίβα ϑέλει (αλλά μόνο από τη μία στοίβα). Ο παίκτης που δεν μπορεί να κινηϑεί χάνει. Να βρεϑεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(2) Έχουμε μια στοίβα με n νομίσματα. Δυο παίκτες αφαιρούν εναλλάξ από 1 εως k νομίσματα από την στοίβα. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεϑεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(3) Έχουμε μια στοίβα με n νομίσματα. Δυο παίκτες αφαιρούν εναλλάξ από $1, 2$ ή 4 νομίσματα από την στοίβα. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεϑεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(4) Έχουμε ένα ϑετικό ακέραιο n. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ αφαιρώντας από τον εκάστοτε αριϑμό ένα διαιρέτη του. Ο παίκτης που πρώτος φτάνει στο 0 χάνει. Να βρεϑεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(5) Δυο παίκτες τοποϑετούν εναλλάξ αξιωματικούς σε μια κανονική σκακιέρα ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεϑεί ποιος έχει στρατηγική νίκης.

(6) Δυο παίκτες τοποϑετούν εναλλάξ ίππους σε μια κανονική σκακιέρα ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεϑεί ποιος έχει στρατηγική νίκης.

(7) Δυο παίκτες τοποϑετούν εναλλάξ κέρματα σε μια $n \times n$ σκακιέρα. Ο πρώτος τοποϑετεί κορώνες και ο δεύτερος γράμματα. Όταν τελειώσουν ο πρώτος κερδίζει ένα βαϑμό για κάϑε γραμμή ή στήλη που έχει περισσότερες κορώνες και ο δεύτερος ένα βαϑμό για κάϑε γραμμή η στήλη που έχει περισσότερα γράμματα. Νικητής είναι όποιος μαζέψει τους περισσότερους βαϑμούς. Ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης;

(8) Στον πίνακα έχουμε γραμμένους τους αριθμούς 37 και 55. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε βήμα ο παίκτης επιλέξει δύο διαφορετικούς αριθμούς, έστω τους x, y και γράφει στον πίνακα τον $|x-y|$. Ο παίκτης που δεν μπορεί να παίξει χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(9) (Game of Chomp) Έχουμε μια $m \times n$ σοκολάτα με $m, n > 1$. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε βήμα ο παίκτης που παίζει επιλέγει ένα τετραγωνάκι της σοκολάτας και τρώει αυτό καθώς και όσα άλλα βρίσκονται στα δεξιά του ή από πάνω του ή και πάνω και δεξιά. Το κάτω αριστερά τετραγωνάκι είναι δηλητηριασμένο και όποιος το φάει χάνει. Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(10) Δυο παίκτες επιλέγουν σημεία ενός 3×3 πίνακα. Ο πρώτος παίκτης τα χρωματίζει μπλε και ο δεύτερος κόκκινα. Ο πρώτος παίκτης κερδίζει αν σχηματίσει μια ευθεία οριζόντια, κάθετη ή διαγώνια με 5 μπλε σημεία. Αλλιώς κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Να βρευεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης. [Προσοχή: Το αποτέλεσμα δεν είναι το αναμενόμενο!]

(11) Ένας πύργος βρίσκεται στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι μιας σκακιέρας. Δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ μετακινώντας τον είτε προς τα πάνω είτε προς τα δεξιά όσα βήματα θέλουν (αλλά τουλάχιστον ένα). Νικητής είναι ο παίκτης που θα τον μετακινήση στο άνω δεξιά τετραγωνάκι.

(12) (Σοβιετική Ένωση 1969) Δίνεται το πολυώνυμο $x^3 + ax^2 + bx + c$. Ο πρώτος παίκτης επιλέγη μια ακέραια τιμή για ένα, οποιοδήποτε θέλει, από τα a, b, c. Ακολούθως ο δεύτερος παίκτης επιλέγει μια ακέραια τιμή για ένα από τα άλλα και τέλος ο πρώτος παίκτης επιλέγει μια ακέραια τιμή για το τελευταίο. Να δείξετε ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί να παίξει με τέτοιο τρόπο ώστε οι ρίζες του πολυωνύμου να είναι όλες ακέραιες.