Αναλλοίωτες

Δημήτρης Χριστοφίδης

Έκδοση 1η: Παρασκευή 3 Απριλίου 2015.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Έχω γραμμένα στον πίνακα πέντε μηδενικά και έξι άσσους. Σε κάθε βήμα, επιτρέπεται να επιλέξετε δύο ψηφία, οποιαδήποτε θέλετε, και να κάνετε το εξής: Αν είναι τα ίδια, να τα σβήσετε και να γράψετε ένα επιπλέον μηδενικό. Αν είναι διαφορετικά, να τα σβήσετε και να γράψετε έναν επιπλέον άσσο. Ποιος αριθμός θα μείνει στο τέλος της διαδικασίας;

Λύση. Μπορούμε εύκολα να κάνουμε την διαδικασία αρκετές φορές. Παρατηρούμε ότι κάθε φορά καταλήγουμε στον αριθμό 0. Το ζητούμενο είναι να αποδειχθεί ότι αυτό συμβαίνει πάντα.

Η βασική παρατήρηση για την λύση είναι η εξής: Αρχικά το άθροισμα των αριθμών είναι άρτιος. Παρατηρούμε ότι όποιο βήμα και να κάνουμε το άθροισμα παραμένει άρτιος. [Π.χ. αν αφαιρέσουμε δύο άσσους θα πρέπει να προσθέσουμε ένα μηδενικό. Το καινουργιο αθροισμα μειωνεται κατα δυο οπότε αν ήταν άρτιος τότε παραμένει άρτιος.] Οπότε στο τέλος της διαδικασίας το άθροισμα θα παραμείνει άρτιος και άρα ο τελικός αριθμός θα πρέπει να ισούται με 0.

Σχόλιο. Σε αυτό το παράδειγμα ονομάζουμε την αρτιότητα του αθροίσματος **αναλλοίωτη** επειδή δεν μεταβάλλεται.

Συχνά, σε προβλήματα όπου ακολουθούμε μια διαδικασία ψάχνουμε για μια παράσταση η οποία παραμένει αναλλοίωτη μετά από κάθε βήμα της διαδικασίας.

Παράδειγμα 2. Έχω γραμμένα στον πίνακα πέντε μηδενικά και έξι άσσους. Σε κάθε βήμα, επιτρέπεται να επιλέξετε δύο ψηφία, οποιαδήποτε θέλετε, και να κάνετε το εξής: Αν είναι τα ίδια, να τα σβήσετε και να γράψετε έναν επιπλέον άσσο. Αν είναι διαφορετικά, να τα σβήσετε και να γράψετε ένα επιπλέον μηδενικό. Ποιος αριθμός θα μείνει στο τέλος της διαδικασίας;

Λύση. Εδώ παρατηρούμε ότι η αρτιότητα του αθροίσματος αλλάζει σε κάθε βήμα. Το άθροισμα εναλλάσσεται μεταξύ άρτιου και περιττού.

Αρχικά ο αριθμός είναι άρτιος. Αφού έχουμε έντεκα αριθμούς, θα κάνουμε ακριβώς δέκα βήματα. Άρα θα έχουμε εναλλαγή της αρτιότητας δέκα φορές και άρα θα καταλήξουμε σε άρτιο, δηλαδή στο 0.

Σχόλιο. Εδώ η αρτιότητα του αθροίσματος δεν είναι πλέον αναλλοίωτη. Αλλάζει όμως με συγκεκριμένο τρόπο και άρα μπορούμε να γνωρίζουμε με τι ισούται σε κάθε βήμα. Μπορούμε να γράψουμε την πιο πάνω λύση χρησιμοποιώντας και αναλλοίωτες μόνο που αυτή την φορά η αναλλοίωτη θα είναι διαφορετική:

Έστω N ο αριθμός των ψηφίων που είναι γραμμένα στον πίνακα και έστω S το άθροισμά τους. Τότε η αρτιότητα $N+S$ παραμένει αναλλοίωτη. (Ελέγξτε το!) Αρχικά ο $N+S$ είναι περιττός. Άρα για να είναι και στο τέλος περιττός πρέπει να καταλήξουμε στο 0.

Παράδειγμα 3. Έστω μια 8×8 σκακιέρα από την οποία λείπουν το άνω αριστερά και κάτω δεξιά τετραγωνάκια. Να εξετάσετε αν μπορεί να καλυφθεί από ντόμινο. (Κάθε ντόμινο καλύπτει δύο τετραγωνάκια τα οποία μοιράζονται μία πλευρά.)

Λύση. Όχι. Με τον κανονικό χρωματισμό της σκακιέρας, το άνω αριστερά και κάτω δεξιά τετραγωνάκια είναι άσπρα. Οπότε μένουν 30 μαύρα τετραγωνάκια και 32 άσπρα. Κάθε ντόμινο όμως καλύπτει ένα μαύρο και ένα άσπρο τετραγωνάκι οπότε η πλήρης κάλυψη είναι αδύνατη.

Σχόλιο. Εδώ σαν αναλλοίωτη μπορούμε να πάρουμε την διαφορά των μαύρων και άσπρων τετραγώνων.

Παράδειγμα 4. Έχουμε τρεις στήλες με $10, 11$ και 12 νομίσματα αντίστοιχα. Σε κάθε βήμα, μπορούμε να επιλέξουμε δύο στήλες, να πάρουμε ένα νόμισμα από κάθε μία από αυτές τις στήλες, και να το μεταφέρουμε στην άλλη στήλη. Να εξεταστεί αν μπορούμε να μεταφέρουμε όλα τα νομίσματα σε μία στήλη.

Λύση. Αν αφαιρέσουμε τον αριθμό των νομισμάτων της πρώτης στήλης από τον αριθμό των νομισμάτων της δεύτερης στήλης η απάντηση θα είναι πάντα $1 \bmod 3$. Οπότε δεν μπορούμε να μεταφέρουμε όλα τα νομίσματα στην τρίτη στήλη. Με παρόμοιο τρόπο δεν μπορούμε να μεταφέρουμε όλα τα νομίσματα ούτε στις άλλες δύο στήλες.

Σχόλιο. Εδώ βλέπουμε ότι δεν πρέπει να κοιτάμε μόνο την αρτιότητα αλλά συχνά την ισοτιμία modulo κάποιον άλλο αριθμό.

Για να μπορέσουμε να βρούμε την κατάλληλη αναλλοίωτη βοηθάει να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε σε κάποιο βήμα (x, y, z) νομίσματα, στο επόμενο βήμα θα έχουμε $(x-1, y-1, z+2)$

ή $(x-1, y+2, z-1)$ ή $(x+2, y-1, z-1)$ νομίσματα. Προσπαθούμε τώρα να βρούμε μια αναλλοίωτη. Αν κοιτάξουμε την διαφορά των νομισμάτων μεταξύ της πρώτης και δεύτερης στήλης αυτή είτε παραμένει ίδια, είτε αυξάνεται ή μειώνεται κατά 3. Οπότε επιλέγουμε να εργαστούμε $\bmod 3$.

Παράδειγμα 5. Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 10$. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε δύο αριθμούς x, y, τους σβήνουμε, και γράφουμε στην θέση τους τον $xy + x + y$. Σε ποιους αριθμούς μπορούμε να καταλήξουμε;

Λύση. Εδώ βολεύει να ελέγξουμε και κάποια μικρότερα παραδείγματα: Αν έχουμε τους $1, 2$ σίγουρα θα καταλήξουμε στον 5. Αν έχουμε τους $1, 2, 3$ έχουμε τρεις δυνατές διαδικασίες. Είτε θα πάμε στο $3, 5$ και μετά στο 23, είτε θα πάμε στο $2, 7$ και μετά στο 23, είτε στο $1, 11$ και μετά πάλι στο 23. Φαίνεται λοιπόν ότι η τελική απάντηση μάλλον είναι ανεξάρτητη του τρόπου με την οποία κάνουμε την διαδικασία. Αν έχουμε τους $1, 2, 3, 4$ τότε πάμε σε δύο βήματα στο $4, 23$ και στο επόμενο βήμα πάμε στο 119. (Υποψιαζόμαστε ότι θα καταλήξουμε στο ίδιο νούμερο ανεξάρτητα από τον τρόπο που εκτελούμε την διαδικασία.)

Επίσης από τις απαντήσεις μέχρι στιγμής υποψιαζόμαστε ότι η απάντηση αν ξεκινήσουμε από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$ θα είναι $(n+1)! - 1$.

Θέλουμε να βρούμε μια αναλλοίωτη για να το δείξουμε αυτό. Θα χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές ταυτότητες. Παρατηρούμε ότι

$$xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1.$$

Αν έχουμε γραμμένους τους αριθμούς $a_1, \ldots, a_k$ θεωρούμε την παράσταση

$$T = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1) - 1.$$

Η πιο πάνω ταυτότητα μας δείχνει ότι η T παραμένει αναλλοίωτη. Αρχικά ισούται με $11! - 1$ οπότε στο τέλος θα μείνει γραμμένος στον πίνακα αυτός ο αριθμός.

Σχόλιο. Η γνώση αλγεβρικών ταυτοτήτων πολλές φορές βοηθάει στην κατασκευή των αναλλοίωτων.

Επίσης σε πολλά προβλήματα, είτε με αναλλοίωτες είτε όχι, βοηθάει να ελέγχουμε τις μικρότερες περιπτώσεις για να κατανοήσουμε καλύτερα τι συμβαίνει.

Παράδειγμα 6. Έχουμε μια 5×5 σκακιέρα όπου ένα γωνιακό τετραγωνάκι είναι μαύρο και τα υπόλοιπα τετραγωνάκια είναι άσπρα. Μπορούμε σε κάθε βήμα να πάρουμε μια σειρά ή μια στήλη και να αλλάξουμε τον χρωματισμό κάθε τετραγώνου σε αυτήν. Μπορούμε να κάνουμε όλα τα τετραγωνάκια άσπρα;

Λύση. Όχι. Ο αριθμός των μαύρων γωνιακών τετραγώνων είναι αναλλοίωτος mod2.

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι η αναλλοίωτη μπορεί να μην χρησιμοποιεί όλες τις πληροφορίες του προβλήματος. Εδώ χρησιμοποιήσαμε μόνο ένα μικρό κομμάτι της σκακιέρας για να φτιάξουμε την αναλλοίωτη.

Παράδειγμα 7. Στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου γράφουμε διαδοχικά τους αριθμούς $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Σε κάθε βήμα επιτρέπεται να επιλέξουμε δύο διαφορετικές κορυφές και να προσθέσουμε τον αριθμό 1 και στις δύο κορυφές. Μπορούμε μετά από μια ακολουθία βημάτων να κάνουμε τους αριθμούς σε όλες τις κορυφές ίσους;

Λύση. Όχι. Αν $x_1, \ldots, x_6$ οι αριθμοί στις κορυφές τότε το $S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6$ παραμένει αναλλοίωτο. Αρχικά έχουμε $S = 2$. Άρα δεν μπορούμε να κάνουμε όλους τους αριθμούς ίσους αφού τότε θα είχαμε $S = 0$.

Σχόλιο. Εδώ έχουμε μια παραλλαγή της ιδέας στο προηγούμενο παράδειγμα. Εδώ ναι μεν λαμβάνουμε υπόψην όλες τις κορυφές αλλά την κάθε μία με διαφορετικό «βάρος». Πολλές φορές μάλιστα μπορεί τα «βάρη» μας καθώς και το άθροισμα μπορεί να είναι $\mathrm{mod}\, n$ για κάποιο n.

Παράδειγμα 8. Σε κάθε κελί ενός ορθογώνιου πίνακα είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Σε κάθε βήμα μπορούμε να είτε να αφαιρέσουμε 1 από κάθε κελί μιας γραμμής, είτε να διπλασιάσουμε τον αριθμό σε κάθε κελί μιας στήλης. Να δειχθεί ότι μπορούμε με μια διαδικασία τέτοιων βημάτων να κάνουμε όλους τους αριθμούς ίσους με 0.

Λύση. Αρκεί να κάνουμε τους αριθμούς της τελευταίας γραμμής ίσους με 0 διατηρώντας όλους τους άλλους αριθμούς θετικούς. Έστω S το άθροισμα των αριθμών της τελευτάιας γραμμής. Προχωράμε με τα εξής βήματα:

(α) Αν όλοι οι αριθμοί της τελευταίας γραμμής ισούνται με 1 ή αν κανένας αριθμός της τελευταίας γραμμής δεν ισούται με 1, τότε αφαιρούμε 1 από κάθε αριθμό της τελευταίας γραμμής.

(β) Αν η τελευταία γραμμή έχει κάποιους αριθμούς που ισούνται με 1, τότε πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς κάθε στήλης που περιέχει τέτοιον αριθμό με το 2. Ακολούθως αφαιρούμε 1 από κάθε αριθμό της τελευταίας γραμμής.

Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε από τα βήματα (α) ή (β) κάνουμε, το S μειώνεται κατά ένα ακέραιο αριθμό. Επιπλέον κάθε αριθμός της τελευταίας γραμμής είναι πάντα θετικός, άρα και το S είναι θετικό, εκτός και αν πετύχουμε με το (α) να τους κάνουμε όλους ίσους με 0. Αυτή η διαδικασία όμως δεν μπορεί να συνεχίζεται επ΄ άπειρον οπότε σε κάποια στιγμή θα καταφέρουμε να κάνουμε όλους τους αριθμούς ίσους με 0.

Σχόλιο. Εδώ το S δεν είναι αναλλοίωτη. Επειδή όμως μειώνεται συνέχεια το ονομάζουμε **ημι-αναλλοίωτη**. Συνήθως κατασκευάζουμε ημι-αναλλοίωτες που σε κάθε βήμα αν αλλάξουν, αλλάζουν πάντα προς μία κατεύθυνση. (Είτε αυξάνονται είτε μειώνονται.) Το επόμενο βήμα είναι να δειχθεί πως δεν μπορεί αυτή η μείωση να γίνεται κατ΄ εξακολούθηση. Στο παράδειγμά μας επειδή κάθε φορά είχαμε μείωση κατά ένα ακέραιο αριθμό, και επειδή δεν γινόταν να πάρουμε αριθμό μικρότερο του 0, σε κάποια στιγμή η διαδικασία θα σταματούσε.

Παρατηρούμε επίσης ότι στην λύση δεν κάναμε τα βήματα που μας έδωσαν ένα ένα αλλά είχε φορές που κάναμε πολλά βήματα μαζί. Αυτό συμβαίνει συχνά όταν έχουμε ημι-αναλλοίωτες. Συνήθως κάποια από τα βήματα διατηρούν την ημι-αναλλοίωτη σταθερή ενώ κάποια άλλα την αλλάζουν. Στόχος είναι να δειχθεί ότι μπορούμε πάντα κάνουμε κάποιο βήμα που την αλλάζει.

Παράδειγμα 9. (Ο στρατός του Conway) Σε κάθε σημείο με συντεταγμένες (m, n) όπου m ακέραιος και n αρνητικός ακέραιος τοποθετούμε ένα πιόνι. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε δύο γειτονικά πιόνια. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ένα από τα δύο πιόνια για να πηδήξουμε πάνω από το άλλο πιόνι ώστε το πρώτο πιόνι να μετακινηθεί δύο θέσεις, αρκεί η θέση που θα καταλάβει το πρώτο πιόνι να είναι κενή. Μετά το πήδημα αφαιρούμε το δεύτερο πιόνι. Να εξετάσεται αν μπορούμε να μεταφέρουμε ένα πιόνι στην θέση $(0, 4)$.

Λύση. Όχι δεν μπορούμε. Έστω x η θετική λύση της $x^2 + x - 1 = 0$. (Δηλαδή $x = (-1+\sqrt{5})/2$.) Στο $(0, 4)$ δίνουμε βάρος 1 ενώ σε κάθε άλλο σημείο δίνουμε βάρος x^k όπου k το άθροισμα της οριζόντιας και κάθετης απόστασής του (σε απόλυτες τιμές) από το σημείο. Π.χ. στο σημείο $(3, -2)$ δίνουμε βάρος $x^{|3-0|+|4-(-2)|} = x^9$.

Η πρώτη σειρά του στρατού έχει άθροισμα βαρών

$$x^5(1 + 2(x + x^2 + x^3 + \cdots) = x^5 \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) = \frac{x^5(1+x)}{1-x} = x^3(1+x).$$

Η δεύτερη σειρά έχει άθροισμα $x^4(1+x)$, η τρίτη $x^5(1+x)$ κ.τ.λ. Οπότε το συνολικό άθροισμα βαρών είναι

$$x^3(1+x)(1+x+x^2+\cdots) = \frac{x^3(1+x)}{1-x} = x(1+x) = x+x^2 = 1.$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα το άθροισμα των βαρών δεν μειώνεται. Επειδή όμως το συνολικό βάρος ισούται με 1 για να φέρουμε ένα πιόνι στο $(0,4)$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όλα τα άλλα πιόνια. Αυτό δεν μπορεί να γίνει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Σχόλιο. Μερικές φορές κάποιες αποδείξεις στα μαθηματικά ξεκινούν βγάζοντας λαγό από το καπέλο. Εδώ ο λαγός είναι η επιλογή του x. Με μια δεύτερη ανάγνωση πάντως, η επιλογή του x δεν ήταν και τόσο μαγική. Τόσο το x όσο και τα βάρη επιλέγηκαν ώστε κάθε κίνηση προς τον στόχο να αφήνει το άθροισμα αναλλοίωτο.

Παράδειγμα 10. Σε μια $n \times n$ σκακιέρα, κάποια τετράγωνα είναι μολυσμένα. Κάθε μολυσμένο τετράγωνο παραμένει πάντα μολυσμένο. Επίσης κάθε μη μολυσμένο τετράγωνο που έχει τουλάχιστον δύο γειτονικά μολυσμένα τετράγωνα μολύνεται και αυτό. Να βρεθεί το ελάχιστο k ώστε να υπάρχουν k μολυσμένα τετράγωνα που να μπορούν να μολύνουν όλη την σκακιέρα.

Λύση. Έστω S το άθροισμα όλων των πλευρών που ανήκουν σε ακριβώς ένα μολυσμένο τετράγωνο. Τότε το S δεν αυξάνεται. Στο τέλος ισούται με $4n$ (η περίμετρος του τετραγώνου). Άρα αρχικά πρέπει να έχουμε τουλάχιστον n μολυσμένα τετραγωνάκια. Αν μολύνουμε τα n τετραγωνάκια στην κύρια διαγώνιο τότε παρατηρούμε ότι μπορούν να μολύνουν όλη την σκακίερα. Άρα $k = n$.

Σχόλιο. Άλλος ένας λαγός απ΄ το καπέλο! Το S μπορεί να θεωρηθεί η περίμετρος των μολυσμένων χωρίων. Η περίμετρος καθώς και άλλα γεωμετρικά μέγεθη μπορεί να αποδειχθούν χρήσιμα ως αναλλοίωτα.

Ασκήσεις

(1) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 2015$. Σε κάθε βήμα παίρνουμε δύο αριθμούς x, y, τους σβήνουμε, και γράφουμε στην θέση τους τον $|x-y|$. Μπορούμε να κάνουμε την διαδικασία με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήξουμε στο 1;

(2) Στον πίνακα έχουμε γραμμένους τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε δύο αριθμούς x, y και τους αλλάζουμε στους $x+1$ και $y-1$. Να εξεταστεί για ποια n μπορούμε να τους κάνουμε όλους ίδιους.

(3) (Σοβιετική Ένωση 1962) Έστω ένα πολλαπλάσιο N του 9 με 1962 ψηφία. Έστω a το άθροισμα των ψηφίων του N, έστω b το άθροισμα των ψηφίων του a και έστω c το άθροισμα των ψηφίων του b. Να υπολογιστεί ο αριθμός c.

(4) (Καζακστάν 2013) Στον πίνακα έχουμε γραμμένους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 25. Σε κάθε βήμα δικαιούμαστε να διαγράψουμε οποιουσδήποτε τρεις αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα, έστω τους a, b, c, και να γράψουμε τον $a^3 + b^3 + c^3$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να μείνει μόνο ένας αριθμός γραμμένος στον πίνακα. Να δειχθεί ότι ο τελικός αριθμός δεν μπορεί να ισούται με 2013^3.

(5) Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ με $x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \cdots + x_nx_1x_2x_3 = 0$. Να δειχθεί ότι το n είναι πολλαπλάσιο του 4.

(6) Έχουμε μια 8×8 σκακιέρα όπου ένα γωνιακό τετραγωνάκι είναι μαύρο και τα υπόλοιπα τετραγωνάκια είναι άσπρα. Μπορούμε σε κάθε βήμα να πάρουμε μια σειρά ή μια στήλη και να αλλάξουμε τον χρωματισμό κάθε τετραγώνου σε αυτήν. Μπορούμε να κάνουμε όλα τα τετραγωνάκια άσπρα;

(7) Έχουμε μια 8×8 σκακιέρα όπου τα τέσσερα γωνιακά τετραγωνάκια είναι μαύρα και τα υπόλοιπα τετραγωνάκια είναι άσπρα. Μπορούμε σε κάθε βήμα να πάρουμε μια σειρά ή μια στήλη και να αλλάξουμε τον χρωματισμό κάθε τετραγώνου σε αυτήν. Μπορούμε να κάνουμε όλα τα τετραγωνάκια άσπρα;

(8) Έχουμε μια 2×5 σκακιέρα. Αρχικά, σε κάθε σημείο της σκακιέρας έχουμε από ένα πιόνι. Σε κάθε βήμα μπορούμε να πάρουμε δύο πιόνια και να τα μετακινήσουμε σε δύο γειτονικά τους τετραγωνάκια. (Πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά.) Μπορούμε μετά από κάποια βήματα να φέρουμε όλα τα πιόνια στο ίδιο τετραγωνάκι;

(9) Έχουμε τρεις στήλες με κάποια νομίσματα η κάθε μία. Σε κάθε βήμα, μπορούμε να επιλέξουμε δύο στήλες, να πάρουμε ένα νόμισμα από κάθε μία από αυτές τις στήλες, και να το μεταφέρουμε στην άλλη στήλη. Να δειχθεί ότι αν μπορούμε να κάνουμε την διαδικασία ώστε να μείνει μόνο ένα νόμισμα στην πρώτη στήλη, τότε αν κάνουμε με οποιοδήποτε τρόπο την διαδικασία και μας μείνει μόνο ένα νόμισμα αυτό θα βρίσκεται στην πρώτη στήλη.

(10) Αρχικά ένα δωμάτιο είναι άδειο. Μετά από κάθε λεπτό, είτε μπαίνουν δύο άτομα στο δωμάτιο, είτε φεύγει ένα άτομο από το δωμάτιο. Να εξεταστεί αν μπορούν να υπάρχουν 1000 άτομα στο δωμάτιο μετά από 2015 λεπτά.

(11) (Σοβιετική Ένωση 1967) Ξεκινούμε από μια τετράδα θετικών αριθμών (a_1, b_1, c_1, d_1). Στο νιοστό βήμα, αν έχουμε την τετράδα (a_n, b_n, c_n, d_n), στο επόμενο βήμα λαμβάνουμε την τετράδα $(a_n b_n, b_n c_n, c_n d_n, d_n a_n)$. Να δειχθεί ότι δεν θα επανέλθουμε ποτέ στην αρχική τετράδα εκτός και αν $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$.

(12) (Σοβιετική Ένωση 1968) Στα τετραγωνάκια μιας 4×4 σκακιέρας αναγράφονται τα πρόσημα «+» και «-» όπως στο πιο κάτω σχήμα

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Επιτρέπεται να αλλάξουμε το πρόσημο σε όλα τα τετραγωνάκια μιας σειράς, μιας στήλης ή μιας ευθείας παράλληλης σε μια διαγώνιο. (Ειδικότερα επιτρέπεται να αλλάξουμε το πρόσημο σε οποιοδήποτε γωνιακό τετραγωνάκι.) Αποδείξτε ότι όπως και να κάνουμε αυτές τις αλλαγές δεν μπορούμε να κάνουμε όλα τα τετραγωνάκια να έχουν πρόσημο «+».

(13) (Σοβιετική Ένωση 1971) Σε μία από τις κορυφές ενός κανονικού δωδεκαγώνου βάζουμε το πρόσημο «+» ενός σε όλες τις άλλες κορυφές βάζουμε το πρόσημο «-». Επιτρέπεται να αλλάζουμε το πρόσημο k διαδοχικών κορυφών. Να εξεταστεί αν μπορούμε να κάνουμε όλα τα πρόσημα «+» στις εξής περιπτώσεις:
(α) $k = 3$.
(β) $k = 4$.
(γ) $k = 6$.

(14) (Σοβιετική Ένωση 1971) Στην κορυφές κανονικού ν-γώνου γράφουμε κάποιους αριθμούς. Για κάθε τέσσερις συνεχόμενους αριθμούς a, b, c, d μπορούμε να εναλλάξουμε τα b, c αν $(a - d)(b - c) < 0$. Να δείξετε ότι μπορούμε να κάνουμε πεπερασμένο αριθμό εναλλαγών.

(15) Τρεις βάτραχοι βρίσκονται σε τρεις από τις κορυφές ενός τετραγώνου στο επίπεδο. Σε κάθε βήμα ένας βάτραχος πηδάει πάνω από ένα δεύτερο βάτραχο και καταλήγει σε ένα καινούργιο σημείο ώστε ο δεύτερος βάτραχος να βρίσκεται στην μέση του αρχικού και του τελικού

σημείου του πρώτου βατράχου. Να εξεταστεί αν μπορεί σε κάποια φάση ένας βάτραχος να καταλήξει πάνω στην τέταρτη κορυφή του τετραγώνου.

(16) (Βουλγαρια 2004) Μπορούμε σε μα λέξη με τα γράμματα a, b να κάνουμε τις εξής αλλαγές: Να αλλάξουμε μια εμφάνιση aba σε b και αντίστροφα, και να αλλάξουμε μια εμφάνιση του bba σε a και αντίστροφα.

Αν η αρχική λέξη είναι η $aa \cdots ab$ όπου έχουμε 2003 εμφανίσεις του a, μπορούμε με τέτοιες αλλαγές να δημιουργήσουμε την λέξη $baa \cdots a$ όπου και εδώ έχουμε 2003 εμφανίσεις του a;

(17) Έχουμε κάποιους αριθμούς γραμμένους στον πίνακα. Σε κάθε βήμα μπορούμε να επιλέξουμε δύο από αυτούς, έστω τους x, y, να τους σβήσουμε, και στην θέση τους να γράψουμε τον αριθμό $(x+y)/4$. Να δειχθεί ότι αν ξεκινήσουμε με n άσσους τότε θα καταλήξουμε σε ένα αριθμό ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $1/n$.

(18) (JBMO Shortlist 2000) Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο n υπάρχουν ακέραιοι a, b ώστε $n = [a\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}]$.

(19) (JBMO 2008) Τα κελιά μιας 4×4 σκακιέρας είναι βαμμένα άσπρα. Σε κάθε βήμα μπορούμε να επιλέξουμε ένα τετραγωνάκι και να αλλάξουμε το χρώμα αυτού του τετραγώνου καθώς και όλων των γειτονικών του από άσπρο σε μαύρο και αντίστροφα. Να βρεθούν όλα τα n ώστε να μπορούμε σε n βήματα να κάνουμε όλα τα τετράγωνα άσπρα.

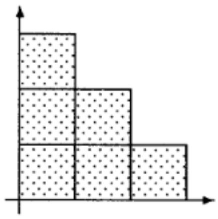
(20) (Κεντροαμερικανική Ολυμπιάδα 2013) Σε ένα κυκλικό τραπέζι κάθονται 2013 άτομα $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$ με αυτήν την σειρά ωρολογιακά. Στην αρχή του παιγνιδιού δίνουμε σε κάθε άτομο ένα ορισμένο αριθμό νομισμάτων (ίσως και κανένα νόμισμα). Συνολικά διαμοιράζουμε 10000 νομίσματα. Ξεκινώντας από τον P_1 και προχωρώντας ωρολογιακά, ο P_i κάνει το εξής όποτε έρχεται η σειρά του: Αν έχει άρτιο αριθμό νομισμάτων τα δίνει όλα στον P_{i+1}, ενώ αν έχει περιττό αριθμό νομισμάτων δίνει περιττό αριθμό νομισμάτων στον P_{i+1}.

Να δειχθεί ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων θα υπάρχει άτομο που θα έχει όλα τα νομίσματα.

(21) (Τουρνουά των Πόλεων 2013) Ένα αγόρι και ένα κορίτσι κάθονται σε ένα παγκάκι. Είκοσι άλλα παιδιά κάθονται διαδοχικά στο παγκάκι, με κάθε ένα να κάθεται μεταξύ δύο παιδιών που ήδη κάθονται στο παγκάκι. Ονομάζουμε ένα αγόρι γενναίο αν κάτσει μεταξύ δυο κοριτσιών και ένα κορίτσι γενναίο αν κάτσει μεταξύ δυο αγοριών.

Όταν κάθισαν όλα τα παιδιά παρατηρήσαμε ότι τα κορίτσια και τα αγόρια κάθονταν εναλλάξ. Να εξεταστεί αν μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των γενναίων παιδιών.

(22) (Τουρνουά των Πόλεων 1981) Σε ένα άπειρο τετραγωνισμένο χαρτί σκιάζονται έξι τετράγωνα όπως στο σχήμα. Σε κάποιο τετράγωνα έχουμε κάποιο πιόνι. Σε κάθε βήμα, αν έχουμε ένα πιόνι όπου τα τετραγωνάκια αμέσως από πάνω και αμέσως δεξιά είναι άδεια, τότε μπορούμε να αφαιρέσουμε αυτό το πιόνι και να προσθέσουμε από ένα πιόνι στα κάθε ένα από αυτά τα δύο τετραγωνάκια.



Σκοπός μας είναι μετά από κάποια βήματα να μην υπάρχει πιόνι στα σκιασμένα τετράγωνα. Να εξεταστεί αν μπορεί να γίναι αυτό αν

(α) Αρχικά έχουμε 6 πιόνια, από ένα σε κάθε σκιασμένο τετραγωνάκι.

(β) Αρχικά έχουμε 1 πιόνι στο κάτω αριστερά σκιασμένο τετραγωνάκι.

(23) (Διαγωνισμός Τσεχίας-Πολωνίας-Σλοβακίας 2013) Ένα τριγωνικό πλέγμα μοιράζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους n σε n^2 τριγωνικά κελιά όπως φαίνεται στο σχήμα για $n = 12$. Κάποια κελιά έχουν μολυνθεί. Ένα μη μολυσμένο κελί μολύνεται αν έχει τουλάχιστον δύο γειτονικά (με πλευρές) μολυσμένα κελιά.

Να βρεθεί, για $n = 12$ ο ελάχιστος αρχικός αριθμός μολυσμένων κελιών ώστε με την πάροδο του χρόνου να μπορούν να μολυνθούν όλα τα υπόλοιπα κελιά.