Θεωρία Γραφημάτων

Δημήτρης Χριστοφίδης

Έκδοση 1η: Πέμπτη 16 Απριλίου 2015.

Γενικές Ασκήσεις

(1) Δείξτε ότι κάθε γράφημα έχει δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό.

(2) Έστω ένα γράφημα G με μέσο όρο βαθμών d. Να δειχθεί ότι υπάρχει υπογράφημα H του G με $\delta(H) \geqslant d/2$.

(3) Έστω γράφημα G με $g(G) \geqslant 5$ και $\delta(G) \geqslant k$. Να δειχθεί ότι το G έχει τουλάχιστον k^2+1 κορυφές.

(4) Να δείξετε ότι υπάρχει γράφημα G σε n κορυφές ισόμορφο με το συμπλήρωμά του αν και μόνο αν $n \equiv 0, 1 \bmod 4$.

(5) Δείξτε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα G έχει ένα μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $\min\{2\delta(G), |G|-1\}$.

(6) Έστω ακέραιος $k > 1$. Έστω γράφημα G ώστε για κάθε δύο κορυφές του G να υπάρχει μεταξύ τους ένα μονοπάτι μήκους τουλάχιστον k. Να δειχθεί ότι το G έχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $\sqrt{k}$

(7) Έστω ένα γράφημα G με $\delta(G) \geqslant 1$. Έστω $d(G)$ ο μέσος όρος των βαθμών του G. Για κάθε κορυφή v του G ορίζουμε $t(v)$ ως τον μέσο όρο των βαθμών των γειτόνων του v. Να δειχθεί ότι υπάρχει κορυφή v με $t(v) \geqslant d(G)$.

Ασκήσεις από διαγωνισμούς

(1) (Σοβιετική Ένωση 1961) Δίνονται n σημεία στο επίπεδο μερικά εκ των οποίων συνδέονται μεταξύ τους με μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα. Μπορούμε να πάμε από κάθε σημείο σε κάθε άλλο σημείο μετακινούμενοι σε αυτά τα τμήματα. Επιπλέον δεν υπάρχει ζεύγος σημείων μεταξύ των οποίων μπορούμε να μετακινηθούμε με δυο διαφορετικούς τρόπους. Να δειχθεί ότι έχουμε ακριβώς $n-1$ τέτοια τμήματα.

(2) (Σοβιετική Ένωση 1966) Σε κάποια χώρα με τουλάχιστον τρεις πόλεις κάποιες πόλεις είναι απευθείας ενωμένες μεταξύ τους με δρόμους. Για κάθε τρεις πόλεις A, B, C της χώρας υπάρχει τρόπος να πάμε από την A στην B χωρίς να περάσουμε από την C. Να δειχθεί ότι για κάθε δυο πόλεις της χώρας μπορούμε να πάμε από την μία στην άλλη με δύο διαφορετικές διαδρομές που δεν παιρνούν από την ίδια πόλη.

(3) (Σοβιετική Ένωση 1968) Μια ορθογώνια πόλη διαιρείται σε τετράγωνα από m οριζόντιους και n κάθετους δρόμους. Σε κάθε δρόμο αλλά όχι στις διασταυρώσεις μπορούμε να βάλουμε κάποιους αστυνομικούς. Κάθε αστυνομικός παρατηρεί την ώρα και την κατεύθυνση κάθε αυτοκινήτου που περνά από το σημείο που βρίσκεται. Γνωρίζουμε ότι κάθε αυτοκίνητο κάνει μια κλειστή διαδρομή χωρίς να περνά από το ίδιο τμήμα κάποιου δρόμου δύο φορές. Να βρεθεί ο ελάχιστος αστυνομικών που χρειαζόμαστε να τοποθετήσουμε ώστε από τις καταγεγραμμένες πληροφορίες τους να μπορούμε να βρούμε την διαδρομή που έκανε κάθε αυτοκίνητο.

(4) (Σοβιετική Ένωση 1968) Κάθε πόλη μιας χώρας είναι απευθείας ενωμένη με το πολύ τρεις άλλες πόλεις μέσω αερογραμμών. Μπορούμε να πάμε από κάθε πόλη σε κάθε άλλη πόλη αλλάζοντας αεροπλάνο το πολύ μία φορά. Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των πόλεων.

(5) (Σοβιετική Ένωση 1968) 20 ποδοσφαιρικές ομάδες συμμετέχουν σε ένα τουρνουά. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός αγώνων που πρέπει να γίνουν ώστε να ισχύει η εξής ιδιότητα: Για κάθε τρεις ομάδες υπάρχουν δύο που έχουν ήδη παίξει μεταξύ τους.

(6) (Σοβιετική Ένωση 1973) Δίνονται $n > 4$ σημεία. Να δειχθεί ότι μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με μονοδρόμους με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να πάμε από κάθε σημεία σε κάθε άλλο σημείο μέσω το πολύ δύο μονοδρόμων. (Αν υπάρχει ένας μονόδρομος από το σημείο A στο σημείο B τότε δεν υπάρχει μονόδρομος από το B στο A.)

(7) (Σοβιετική Ένωση 1977) Υπάρχουν απευθείας διαδρομές από κάθε πόλη μιας χώρας σε κάθε άλλη πόλη. Οι τιμές των ταξιδιών μεταξύ των πόλεων είναι γνωστές εξαρχής. Δυο τουρίστες αποφασίζουν να επισκεφθούν όλες τις πόλεις. Ο πρώτος ταξιδεύει πάντα από την πόλη που βρίσκεται στην πόλη που δεν έχει ακόμη ταξιδέψει χρησιμοποιώντας το πιο φτηνό διαθέσιμο εισιτήριο ενώ ο δεύτερος το πιο ακριβό. Αν έχουν διάφορες επιλογές της ίδιας πιο φθηνής ή πιο ακριβής τιμής αντίστοιχα τότε επιλέγουν αυθαίρετα την πόλη από αυτές τις επιλογές. Ο καθένας ξεκινάει αυθαίρετα από κάποια πόλη (όχι απαραίτητα την ίδια). Δεν

χρειάζεται στο τέλος να επιστρέψουν στην πόλη από την οποία ξεκίνησαν. Να δειχθεί ότι ο πρώτος δεν θα ξοδέψει περισσότερα χρήματα από τον δεύτερο.

(8) (Σοβιετική Ένωση 1979) Κάθε μέλος ενός κοινοβουλίου έχει το πολύ τρεις εχθρούς μέσα στο κοινοβούλιο. Να δειχθεί ότι μπορούμε να χωρίσουμε το κοινοβούλιο σε δύο επιτροπές ώστε κάθε μέλος να έχει το πολύ ένα εχθρό στην επιτροπή του. (Ο A είναι εχθρός του B αν και μόνο αν ο B είναι εχθρός του A.)

(9) (Σοβιετική Ένωση 1980) Υπάρχουν διάφοροι οικισμοί στην όχθη μιας κυκλικής λίμνης. Κάποιοι είναι συνδεδεμένοι με απευθείας ατμοπλοϊκή σύνδεση. Δυο οικισμοί είναι συνδεδεμένοι αν και μόνο αν οι δυο επόμενοι αντιωρολογιακά οικισμοί δεν είναι συνδεδεμένοι. Να δειχθεί ότι μπορούμε να πάμε ατμοπλοϊκώς από κάθε οικισμό σε κάθε άλλο χρησιμοποιώντας το πολύ τρία πλοία.

(10) (Σοβιετική Ένωση 1980) Σε μια πόλη ξέσπασε μια επιδημία γρίππης. Την πρώτη μέρα κάποιοι κάτοικοι μολύνθηκαν από μια εξωτερική πηγή. Κανένας κάτοικος δεν μολύνθηκε αργότερα από αυτήν την εξωτερική πηγή. Η γρίππη σε κάθε κάτοικο κρατάει ακριβώς μία μέρα ενώ την αμέσως επόμενη μέρα ο κάτοικος έχει ανοσία. Κάθε κάτοικος επισκέπεται κάθε μέρα όλους τους άρρωστους φίλους του και αν δεν είναι άρρωστος ούτε έχει ανοσία αρρωστάει και αυτός.

Να δειχθεί ότι

(α) Αν κάποιοι κάτοικοι είχαν ανοσία την πρώτη μέρα από κάποια εξωτερική πηγή τότε η επιδημία γρίπης μπορεί να συνεχιστεί για αυθαίρετα μεγάλο διάστημα.

(β) Αν δεν υπήρχαν άνοσοι κάτοικοι την πρώτη ημέρα τότε η επιδημία γρίπης σίγουρα θα σταματήσει.

(11) (Τουρνουά των πόλεων 1980) Γράφουμε σε κάθε κελί ενός $N \times N$ πίνακα ένα αριθμό. Όλες οι γραμμές του πίνακα είναι διαφορετικές ανά δύο. (Δυο γραμμές θεωρούνται διαφορετικές αν διαφέρουν έστω και σε μία θέση.) Να δειχθεί ότι υπάρχει μία στήλη που μπορούμε να σβήσουμε ώστε όλες οι γραμμές να εξακολουθούν να είναι διαφορετικές ανά δύο.

(12) (Σοβιετική Ένωση 1981) Ένα χωριό έχει 1000 κατοίκους. Κάθε βράδυ κάθε κάτοικος λέει σε όλους τους φίλους του όλα τα νέα που έμαθε την προηγούμενη μέρα. Γνωρίζουμε ότι αν πούμε σε οποιοδήποτε κάτοικο κάποιο νέο τελικά αυτό θα μαθευτεί από όλους.

Να δειχθεί ότι μπορούμε νε επιλέξουμε 90 κατοίκους να πούμε το ίδιο νέο σε όλους, και τελικά το νέο να μαθευτεί από όλους μέσα σε δέκα μέρες.

(13) (Σοβιετική Ένωση 1981) Σε ένα ποδοσφαιρικό τουρνουά με 18 ομάδες διεξήχθησαν 8 γύροι όπου σε κάθε γύρο οι ομάδες χωρίστηκαν σε 9 ζευγάρια που αγωνίστηκαν μεταξύ τους. Να δειχθεί ότι υπάρχουν τρεις ομάδες οι οποίες δεν συναντήθηκαν καθόλου μεταξύ τους.

(14) (Τουρνουά των πόλεων 1981) Σε μια χώρα η πρωτεύουσα είναι απευθείας συνδεδεμένη αεροπορικώς με100 άλλες πόλεις. (Πιθανώς η χώρα να έχει και άλλες πόλεις που δεν είναι συνδεδεμένες αεροπορικώς με την πρωτεύουσα.) Γνωρίζουμε ότι κάθε πόλη εκτός από την πρωτεύουσα είναι απευθείας συνδεδεμένη αεροπορικώς με ακριβώς 10 άλλες πόλεις. Γνωρίζουμε επίσης πως μπορούμε να ταξιδέψουμε από κάθε πόλη της χώρας σε κάθε άλλη πόλη αεροπορικώς, πιθανώς μέσω άλλων πόλεων.

Να δειχθεί ότι μπορούμε να κλείσουμε τις μισές αεροπορικές συνδέσεις με την πρωτεύουσα και να εξακολουθούμε να μπορούμε να ταξιδέψουμε από κάθε πόλη σε κάθε άλλη πόλη αεροπορικώς.

(15) (Σοβιετική Ένωση 1986) Κάποιος βασιλιάς θέλει να κτίσει n πόλεις και $n-1$ δρόμους με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί κάποιος να μετακινηθεί από κάθε πόλη σε κάθε άλλη μέσω αυτών των δρόμων. Θέλει επίσης οι συντομότερες αποστάσεις μεταξύ αυτών των πόλεων να ισούνται με $1, 2, 3, \ldots, n(n-1)/2$ χιλιόμετρα. Να εξεταστεί αν αυτό μπορεί να γίνει αν

(α) $n = 6$.

(β) $n = 1986$.

(16) (Σοβιετική Ένωση 1987) Όλες οι έδρες ενός κυρτού πολυέδρου είναι τρίγωνα. Να δειχθεί ότι μπορούμε να βάψουμε όλες τις ακμές κόκκινες ή μπλε ώστε να μπορούμε να μετακινηθούμε από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη μόνο μέσω των κόκκινων ακμών και μόνο μέσω των μπλε ακμών.

(17) (Σοβιετική Ένωση 1989) Έστω ένα πολύεδρο με άρτιο πλήθος ακμών. Να δειχθεί ότι σε κάθε ακμή μπορούμε να βάλουμε ένα τόξο με κατεύθυνση από την μία κορυφή σε μια άλλη έτσι ώστε σε κάθε κορυφή του πολυέδρου να καταλήγει άρτιο πλήθος τόξων.