Διπλή Απαρίθμηση

1. (Τριπλά συστήματα Steiner) Δίνεται μια οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του $[n]$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

   (α) Για κάθε $A \in \mathcal{F}$, έχουμε $|A| = 3$.

   (β) Για κάθε $x, y \in [n]$ με $x \neq y$ υπάρχει μοναδικό $A \in \mathcal{F}$ με $\{x, y\} \subseteq A$.

   Να δειχθεί ότι $\mathcal{F} = n(n-1)/6$.

   Πιο δύσκολο: Να κατασκευαστεί τέτοια οικογένεια για κάθε $n \equiv 1, 3 \bmod 6$.

2. (Balkan MO 1989/4) Δίνεται μια οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του $[n]$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

   (α) Για κάθε $A \in \mathcal{F}$, έχουμε $|A| = 3$.

   (β) Για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ με $A \neq B$ έχουμε $|A \cap B| \leqslant 1$.

   Έστω $f(n)$ το μεγαλύτερο δυνατό μέγεθος της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{n(n-4)}{6} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n(n-1)}{6}.$$

3. (IMO 1987/1) Έστω $p_n(k)$ ο αριθμός των μεταθέσεων του $[n]$ με ακριβώς k σταθερά σημεία. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

   Επιπλέον ερώτημα: Να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$$

4. (IMO 1998/2) Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν a διαγωνιζόμενοι και b κριτές, όπου $b \geqslant 3$ είναι ένα περιττός ακέραιος. Κάθε υποψήφιος αξιολογείται από κάθε δικαστή, είτε ως «επιτυχών» ή ως «αποτυχών». Έστω k τέτοιο ώστε οι αξιολογήσεις κάθε δύο κριτών συμφωνούν το πολύ σε k διαγωνιζόμενους. Να δειχθεί ότι

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

5. (IMO 1989/3) Έστω θετικοί ακέραιοι n, k και ένα σύνολο S από n σημεία στο επίπεδο έτσι ώστε:

(α) Τα σημεία του S είναι ανά τρία μη συνευθειακά, και

(β) Για κάθε σημείο P του S υπάρχουν τουλάχιστον k σημεία του S τα οποία ισαπέχουν από το P.

Να αποδείξετε ότι
$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

6. (IMO 2005/6) Σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό τέθηκαν 6 προβλήματα στους διαγωνιζόμενους. Κάθε δύο προβλήματα λύθηκαν από περισσότερους από τα 2/5 των διαγωνιζομένων. Επιπλέον κανένας διαγωνιζόμενος δεν έλυσε όλα τα προβλήματα. Να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 διαγωνιζόμενοι οι οποίοι έλυσαν από 5 προβλήματα ο καθένας.