Ασκήσεις συνδυαστικής από όλον τον κόσμο 2013-14

Εδώ μάζεψα όλες τις συνδυαστικές ασκήσεις που βρήκα και οι οποίες τέθηκαν σε εθνικούς και διεθνείς διαγωνισμούς το έτος 2014. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρόσθεσα και ασκήσεις από την IMO Shortlist του 2013. Τις περισσότερες από αυτές τις ασκήσεις τις έχω πάρει από το www.mathlinks.ro. Πολλές φορές έχω αγνοήσει ασκήσεις που μπήκαν σε αρχικούς γύρους εθνικών διαγωνισμών. Σε κάθε άσκηση προσπάθησα να δώσω ένα βαθμό δυσκολίας από το 1 ως το 5. Κάθε τέτοια βαθμολόγηση εννοείται ότι είναι υποκειμενική αλλά η προσπάθειά μου ήταν οι βαθμοί δυσκολίας να αντιπροσωπεύουν τα εξής:

1: Τα μέλη της ομάδας μας πρέπει να έχουν από την αρχή ξεκάθαρη ιδέα στο πως να την λύσουν.

2: Η λύση της άσκησης δεν είναι τόσο άμεση αλλά η άσκηση δεν είναι αρκετά δύσκολη ώστε να μπορούσε να εμφανιστεί στην Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

3: Ασκήσεις εύκολου επιπέδου για ΔΜΟ.

4: Ασκήσεις μέτριου επιπέδου για ΔΜΟ.

5: Ασκήσεις δύσκολου επιπέδου για ΔΜΟ.

Στις περιπτώσεις όπου ταλαντευόμουν μεταξύ δύο διαφορετικών βαθμών δυσκολίας τελικά πρόσθεσα ένα + στον βαθμό δυσκολίας. Π.χ. ένα πρόβλημα που αμφιταλαντευόμουν μεταξύ βαθμού δυσκολίας 2 και 3 εν τέλει του έβαλα βαθμό δυσκολίας 2+.

Τα μέλη της ομάδας πρέπει απαραίτητα να γνωρίζουν κάποιες γνωστές και κλασικές τεχνικές όπως:

1. Αρχή περιστερώνα.
2. Αναλλοίωτες. (Συμπεριλαμβανομένων π.χ. ημι-αναλλοίωτων αλλά και χρωματισμών ώστε να κατασκευαστούν οι αναλλοίωτες.)
3. Απλές μέθοδοι απαρίθμησης. (Όπως π.χ. προσθετική και πολλαπλασιαστική αρχή, θεώρημα αποκλεισμού-εγκλεισμού)
4. Προχωρημένες μέθοδοι απαρίθμησης. (Όπως π.χ. κατασκευή αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών, κατασκευή και επίλυση αναγωγικών τύπων, χρήση γεννήτριων συναρτήσεων.)
5. Διπλή απαρίθμηση.
6. Extremal Principle.
7. Απλή θεωρία γραφημάτων. (Μετάφραση προβλημάτων στης γλώσσα της θεωρίας γραφημάτων, και γνώσεις απλών θεωρημάτων για δέντρα κύκλους, συνεκτικά γραφήματα, γραφήματα Euler κ.τ.λ.)

Στην βαθμολόγηση των ασκήσεων υπέθεσα πως όλα τα πιο πάνω είναι γνωστά. Έτσι π.χ. μια άσκηση η οποία ζητάει να απαριθμήσουμε κάποια αντικείμενα και είναι άμεσο πως θα κατασκευαστεί η αναδρομική ακολουθία θα πάρει βαθμό 1. Εννοείται βέβαια ότι ο βαθμός δυσκολίας αυξάνει ανάλογα και με το πόσο δύσκολο είναι να χρησιμοποιηθεί η πιο πάνω τεχνική. Π.χ. αν είναι δύσκολο να βρούμε την αναλλοίωτη τότε πιθανώς ο βαθμός δυσκολίας να αυξηθεί μέχρι το 3 ή και το 4.

Πέραν των πιο πάνω τεχνικών υπάρχουν και κάποια άλλα θεωρήματα και τεχνικές που καλό είναι τα μέλη της ομάδας μας να γνωρίζουν όσα πιο πολλά και σε όσο περισσότερο βάθος γίνεται. Μερικά από αυτά έχουν εμφανιστεί σε αρκετά παλαιότερες ολυμπιάδες, άλλα έχουν κάνει την εμφάνισή τους πρόσφατα ενώ άλλα ίσως κάνουν την εμφάνισή τους στο μέλλον. Αναφέρω ενδεικτικά:

1. Προχωρημένη θεωρία γραφημάτων. (Π.χ. επίπεδα γραφήματα και τύπος του Euler, κύκλοι Hamilton και θεώρημα Dirac, θεώρημα γάμου, ανεξάρτητα σύνολα και χρωματικοί αριθμοί, θεώρημα Túran.)
2. Απλή θεωρία ομάδων. (Για χρήση σε απαρίθμηση με το θεώρημα Burnside και σε κατασκευή αναλλοίωτων.)
3. Θεωρία Ramsey.
4. Θεώρημα Dilworth.
5. Ακρότατη θεωρία συνόλων. (Π.χ. θεωρήματα Sperner, Erdős-Ko-Rado, Kruskal-Katona)
6. Πιθανολογικές μέθοδοι.

Μερικές από τις πιο κάτω ασκήσεις είναι εξαιρετικά δύσκολες χωρίς γνώση κάποιου εκ των πιο πάνω προχωρημένων θεωρημάτων, αλλά αρκετές απλές με την γνώση του. Τέτοιες ασκήσεις είναι πολύ δύσκολο να δώσεις ένα αντιπροσωπευτικό βαθμό δυσκολίας. Προτίμησα να δώσω βαθμό δυσκολίας θεωρώντας ότι όλα τα πιο πάνω είναι γνωστά! Για να μπορέσω να επισημάνω όμως ότι χρειάζεται κάποιος να έχει κάποιες από αυτές τις επιπλέον γνώσεις πρόσθεσα ένα αστεράκι. Έτσι π.χ. ένα πρόβλημα με βαθμό δυσκολίας $1*$ σημαίνει ότι είναι άμεση εφαρμογή κάποιου από τα πιο πάνω θεωρήματα. Εννοείται ότι χωρίς τέτοια γνώση ο βαθμός δυσκολίας του ιδίου προβλήματος μπορεί να αυξηθεί μέχρι και το 5.

Οι ασκήσεις

1. Δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με $n \geqslant 6$. Να βρεθεί ο αριθμός των τριγώνων με τις κορυφές τους να είναι κορυφές του πολυγώνου και τις πλευρές του να είναι διαγώνιοι (αλλά όχι πλευρές) του πολυγώνου.

Βαθμός Δυσκολίας: 1
Πηγή: Βοσνία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

2. Μπορούν να τοποθετηθούν οι αριθμοί 1 ως 9 στα κελιά ενός 3×3 πίνακα ώστε το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται σε κάθε δύο κελιά τα οποία έχουν κοινή πλευρά να είναι πρώτος;

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Ινδονησία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 1.

3. Μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς $0, 1, 2, \ldots, 9$ σε ένα κύκλο ώστε το άθροισμα κάθε τριών συνεχόμενων αριθμών να είναι το πολύ

   (α) 13

   (β) 14

   (γ) 15

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Ισπανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 1.

4. Κάθε ένας από τους ακεραίους από το 1 ως το 4027 χρωματίζεται πράσινος ή κόκκινος. Σε κάθε βήμα μπορούμε να επιλέξουμε δυο αριθμούς $m, n \in \{1, 2, \ldots, 4027\}$ ώστε ο m/n ή ο n/m να είναι πρώτος, και να αλλάξουμε το χρώμα και των δύο αριθμών.

   Να δειχθεί ότι μπορούμε να κάνουμε μια ακολουθία βημάτων ώστε να κάνουμε κάθε ακέραιο από το 1 ως το 2014 πράσινο.

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Μεξικό, Μαθηματική Ολυμπιάδα, Πρόβλημα 1.

5. Έστω ακέραιος $n > 1$. Χρωματίζουμε n τετραγωνάκια μιας $n \times n$ σκακιέρας πράσινα, άλλα n τα χρωματίζουμε μπλε, και τα υπόλοιπα τα χρωματίζουμε άσπρα.

   Να εξεταστεί ποιοι χρωματισμοί με την πιο πάνω ιδιότητα είναι περισσότεροι: Αυτοί όπου υπάρχει ακριβώς ένα πράσινο τετραγωνάκι σε κάθε σειρά και ακριβώς ένα μπλε σε κάθε στήλη ή αυτοί όπου υπάρχει ακριβώς ένα πράσινο τετραγωνάκι σε κάθε σειρά και ακριβώς ένα μπλε σε κάθε στήλη;

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Νότιος Αφρική, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 5.

6. Στην περιφέρεια ενός κύκλου είναι τοποθετημένοι 99 φυσικοί αριθμοί. Αν a, b είναι δυο γειτονικοί αριθμοί πάνω στην περιφέρεια του κύκλου με $a \geqslant b$ τότε είτε $a - b \in \{1, 2\}$ είτε $a/b = 2$.

   Να δείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς που βρίσκονται στον κύκλο είναι πολλαπλάσιο του 3.

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 1.

7. Να δειχθεί ότι δοθέντων 16 τέλειων κύβων, υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται με το 91.

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 2.

8. Έστω θετικός ακέραιος $n \geqslant 2$ και έστω n σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά. Αποδείξτε ότι μπορούμε να ονομάσουμε τα σημεία ώστε το $P_1P_2 \ldots P_n$ να είναι πολύγωνο με πλευρές που δεν τέμνονται εσωτερικά. (Το πολύγωνο δεν πρέπει να είναι απαραίτητα κυρτό.)

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 4.

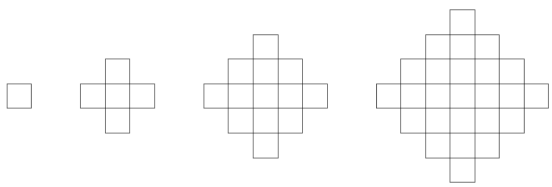
9. Οι αριθμοί από το 1 ως το 2014 είναι γραμμένοι στον πίνακα. Σε κάθε βήμα μπορούμε να σβήσουμε δυο αριθμούς που βρίσκονται γραμμένοι στον πίνακα, έστω τους a και b, και στην θέση τους να γράψουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους.

   Να δειχθεί ότι σε κάθε βήμα, το άθροισμα των αριθμών που υπάρχουν στον πίνακα είναι μεγαλύτερο του $2014\sqrt[2014]{2014!}$.

   Βαθμός Δυσκολίας: 1
   Πηγή: Ολυμπιάδα Cono Sur 2014, Πρόβλημα 1.

10. Χρησιμοποιώντας τετράγωνα μήκους ένα κατασκευάζουμε μια σταυροειδή φιγούρα σε διάφορα βήματα ακολουθώντας τον ειρμό που φαίνεται στο σχήμα. Π.χ. στο πρώτο στάδιο χρησιμοποιούμε 1 τετράγωνο, στο δεύτερο 5, κ.τ.λ.

    Να βρεθεί το τελευταίο στάδιο κατά το οποίο η φιγούρα χρησιμοποιεί λιγότερα από 2014 τετράγωνα.



    Βαθμός Δυσκολίας: 1
    Πηγή: Κεντροαμερικανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.

11. Ο Αλή Μπαμπάς και οι 40 κλέφτες θέλουν να περάσουν τα στενά του Βοσπόρου. Έχουν σταθεί σε μια γραμμή μρ τον Αλή Μπαμπά πρώτο, ώστε κάθε

δυο συνεχόμενα άτομα να είναι φίλοι μεταξύ τους. Επίσης, ο Αλή Μπαμπάς είναι φίλος και με τον τρίτο στην σειρά ενώ δεν υπάρχουν άλλες φιλίες. Έχουν στην διάθεσή τους μια βάρκα στην οποία μπορούν να μπουν είτε 2 είτε 3 άτομα.

Μπορούν να την χρησιμοποιήσουν για να περάσουν τα στενά;

Βαθμός Δυσκολίας: 1
Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, O-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 5

12. Σε ένα τραπέζι υπάρχει άρτιος αριθμός χαρτιών. Σε κάθε χαρτί είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Έστω a_k ο αριθμός των χαρτιών που έχουν γραμμένο το k. Γνωρίζουμε ότι

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots \geqslant 0$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Να δειχθεί ότι τα χαρτιά μπορούν να διαμεριστούν σε ζεύγη ώστε οι αριθμοί σε κάθε ζεύγος να διαφέρουν κατά 1.

Βαθμός Δυσκολίας: 1
Πηγή: Ολυμπιάδα Tuymaada για Seniors 2014, Πρόβλημα 5.

13. Έστω μια μη φθίνουσα ακολουθία $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ θετικών ακεραίων. Ονομάζουμε ένα θετικό ακέραιο καλό αν υπάρχει δείκτης i έτσι ώστε $n = \frac{i}{a_i}$. Να δειχθεί ότι αν ο 2013 είναι καλός τότε και ο 20 είναι καλός.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Γερμανία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3.

14. Έχουμε 100 καλάθια που συνολικά περιέχουν 1000 κιλά ρύζι και 3000 αυγά. Θέλουμε τα καλάθια να έχουν από 10 κιλά ρύζι και από 30 αυγά. Σε κάθε βήμα μπορούμε να πάρουμε δύο καλάθια και να μεταφέρουμε από το ένα καλάθι στο άλλο όσο ρύζι και όσα αυγά θέλουμε. (Επιτρέπεται να μεταφέρουμε ρύζι από το πρώτο καλάθι στο δεύτερο και αυγά από το δεύτερο στο πρώτο.)

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός βημάτων ώστε να είμαστε σίγουροι πως θα τα καταφέρουμε.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Ιράν, Μαθηματική Ολυμπιάδα, Δεύτερος Γύρος 2014, Πρόβλημα 1.

15. Έχουμε 2014 μπάλες χρωματισμένες με 106 διαφορετικά χρώματα, με 19 μπάλες από κάθε χρώμα. Να βρεθεί το ελάχιστο n ώστε ανεξάρτητα από το πως θα διαρρυθμιστούν οι μπάλες σε ένα κύκλο να μπορούμε να επιλέξουμε n συνεχόμενες από αυτές με 53 διαφορετικά χρώματα.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής για Juniors 2014, Πρόβλημα 3.

16. Σε ένα τραπέζι βρίσκονται 100 χαρτιά αριθμημένα από το 1 ως το 100. Ο Αντρέας και ο Νίκος πήραν τον ίδιο αριθμό από χαρτιά με τέτοιο τρόπο

ώστε αν ο Αντρέας πήρε το χαρτί με τον αριθμό n, τότε ο Νίκος πήρε το χαρτί με τον αριθμό $2n + 2$. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χαρτιών που μπορεί να πήραν οι δυο παίκτες;

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Ουκρανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 4.

17. Δίνεται σύνολο S και συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to S$ με την ιδιότητα $f(x) \neq f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{N}$ με $|x - y|$ ίσο με πρώτο.

Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός στοιχείων του S.

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής για Βαλκανιάδα, Πρόβλημα 2.

18. Η μητέρα της Όλγας έφτιαξε 15 πίτες. Τις έβαλε σε ένα κυκλικό ταψί με την εξής κυκλική σειρά: 7 με λάχανο, 7 με κρέας, και μία με κεράσια και τις έβαλε στον φούρνο να ψηθούν. Η Όλγα θέλει να φάει την πίτα με τα κεράσια. Όλες οι πίτες φαίνονται ίδιες. Η Όλγα γνωρίζει την σειρά αλλά δεν γνωρίζει πως περιστράφηκε το ταψί.

Μπορεί να φάει την πίτα με τα κεράσια αν επιτρέπεται να φάει μόνο 4 πίτες;

Βαθμός Δυσκολίας: 1+
Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Ο-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 2

19. Σε κάθε σημείο X του χώρου, αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό $f(X) \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε μη εκφυλισμένο τετράεδρο $ABCD$ με κέντρο εγγεγραμμένης σφαίρας O ισχύει ότι

$$f(O) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$

Να δειχθεί ότι $f(X) = 1$ για κάθε σημείο του χώρου X.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Βουλγαρία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

20. Σε ένα σχολείο υπάρχουν n μαθητές. Κάποιοι είναι φίλοι μεταξύ τους και κάποιοι όχι με τις φιλίες να είναι αμοιβαίες. Ορίζουμε τα a, b ως τις ελάχιστες τιμές ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

    (α) Μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε a ομάδες ώστε σε κάθε ομάδα όλοι είναι φίλοι μεταξύ τους.

    (β) Μπορούμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε b ομάδες ώστε να μην υπάρχουν σε καμία ομάδα δυο μαθητές που να είναι φίλοι.

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του $N = a + b$ σε σχέση με το n.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Ιαπωνία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

21. Δίνονται θετικοί ακέραιοι n, k, m με $k \leqslant n$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{k\binom{m}{r}\binom{n}{k}}{(k+r)\binom{m+n}{r+k}}.$$

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Ινδονησία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.

22. Δίνεται ένα δέντρο με n κορυφές αριθμημένες από το 1 ως το n ώστε κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό αριθμό. Αλλάζουμε την αρίθμηση με τον πιο κάτω τρόπο: Παίρνουμε τις ακμές μία προς μία (με κάποια σειρά) και ανταλλάζουμε τις αριθμήσεις στις κορυφές της ακμής. Αφού το κάνουμε αυτό για όλες τις κορυφές παίρνουμε μια καινούργια αρίθμηση των κορυφών η οποία είναι μια μετάθεση της αρχικής.

Να δειχθεί ότι αυτή η μετάθεση είναι ένας πλήρης κύκλος σε n στοιχεία.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Ιράν, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.

23. Να δειχθεί ότι υπάρχει φυσικός ο οποίος μπορεί να γραφτεί με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους ως

$$x_1^{2014} + \cdots + x_{2015}^{2014}.$$

όπου $x_1, x_2, \cdots, x_{2015}$ διακεκριμένοι φυσικοί.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Ιταλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 5.

24. Έστω περιττοί θετικοί ακέραιοι m, n. Χρωματίζουμε κάθε τετράγωνο ενός $m \times n$ πίνακα είτε κόκκινο είτε μπλε. Μια σειρά ονομάζεται κόκκινα-κυριαρχημένη αν έχει περισσότερα κόκκινα τετράγωνα από μπλε. Μια στήλη ονομάζεται μπλε-κυριαρχημένη αν έχει περισσότερα μπλε τετράγωνα από κόκκινα. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό άθροισμα των κόκκινα-κυριαρχημένων σειρών και μπλε-κυριαρχημένων στηλών.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Καναδάς, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.

25. Έστω θετικός ακέραιος $n \geqslant 4$. Σε ένα διαγωνισμό επιτραπέζιας αντισφαίρισης λαμβάνουν μέρος n άτομα με όλα τα ζεύγη να παίζουν από ακριβώς ένα αγώνα μεταξύ τους με κάθε αγώνα να έχει ένα νικητή.

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του n ώστε όπως και να έρθουν τα αποτελέσματα να μπορούμε να βρούμε μια τετράδα ατόμων (a_1, a_2, a_3, a_4) ώστε ο a_i να έχει κερδίσει τον a_j για κάθε $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11 Νοτιοανατολικής Κίνας, Πρόβλημα 2.

26. Έστω σύνολα θετικών ακεραίων A, B. Το άθροισμα κάθε δύο διακεκριμένων στοιχείων του A ανήκει στο B. Το πηλίκο κάθε δύο διακεκριμένων στοιχείων του B, όπου διαιρούμε το μεγαλύτερο στοιχείο με το μικρότερο, είναι ένα στοιχείο του A.

    Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός στοιχείων του $A \cup B$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Ολλανδία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.

27. Σε μια χώρα οι μαθηματικοί θέλουν να επιλέξουν ένα $\alpha > 2$ και να εκδώσουν νομίσματα σε ονομαστικές αξίες a^k ρουβλιών για κάθε μη αρνητικό ακέραιο α ώστε όλες οι αξίες για k θετικό ακέραιο να είναι άρρητοι.

    Μπορούν να κάνουν την επιλογή με τέτοιο τρόπο ώστε οποιαδήποτε ακέραια ποσότητα ρουβλιών να μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας το πολύ 6 νομίσματα από κάθε ονομαστική αξία;

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 7.

28. Ο Πέτρος και ο Μπομπ παίζουν ένα παιχνίδι σε μια $n \times n$ σκακιέρα. Στην αρχή όλη η σκακιέρα είναι άσπρη εκτός από το γωνιακό κουτάκι στο οποίο υπάρχει ένας πύργος και είναι μαύρο. Σε κάθε γύρο κάθε παίχτης μπορεί να κουνήσει τον πύργο όπως θέλει (οριζόντια ή κάθετα όπως στο σκάκι) και βάφονται μαύρα τα κουτάκια από τα οποία περνά ο πύργος. Ο πύργος δεν μπορεί να περάσει από κουτάκια που είναι ήδη βαμμένα μαύρα. Στο τέλος χάνει αυτός που δεν μπορεί να κάνει καμία κίνηση. Ο Πέτρος ξεκινάει πρώτος.

    Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 2.

29. Ορίζουμε ως ντόμινο ένα διατεταγμένο ζεύγος διακεκριμένων θετικών ακεραίων. Μια γνήσια ακολουθία από ντόμινο είναι μια λίστα από διακεκριμένα ντόμινο ώστε η πρώτη συντεταγμένη κάθε ζεύγους, εκτός από το πρώτο, ισούται με την δεύτερη συντεταγμένη του προηγούμενου ζεύγους, και επιπλέον, για κάθε $i \neq j$ τα ντόμινο (i, j) και (j, i) δεν εμφανίζονται και τα δύο στην λίστα. Έστω D_n το σύνολο όλων των ντόμινο με συντεταγμένες μικρότερες ή ίσες του n. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος μιας γνήσιας ακολουθίας από ντόμινο που ανήκουν στο σύνολο D_n.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.

30. Έχουμε 2015 νομίσματα σε ένα τραπέζι. Για $i = 1, 2, \ldots, 2015$ διαδοχικά, μπορούμε να αναποδογυρίσουμε ακριβώς i νομίσματα. Να δειχθεί ότι μπορούμε πάντα να κάνουμε την διαδικασία με τέτοιο τρόπο ώστε η πάνω όψη

όλων των νομισμάτων να είναι κορώνα ή όλων να είναι γράμματα αλλά δεν μπορούμε να επιτύχουμε και τα δύο.

31. Δυο πιόνια βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες. Σε κάθε βήμα επιτρέπεται να επιλέξουμε ένα από τα πιόνια και να το τοποθετήσουμε σε ένα άλλο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες με την προϋπόθεση η απόσταση μεταξύ των δύο πιονιών να μείνει σταθερή.

    Μπορούμε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων να εναλλάξουμε τις θέσεις των δύο πιονιών;

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Σαουδική Αραβία, Τέταρτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3.

32. Δίνονται $3m$ μπάλες αριθμημένες ως $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots, m, m, m$. Τις τοποθετούμε σε 8 κουτιά ώστε κάθε δύο κουτιά να έχουν από μία μπάλα με τον ίδιο αριθμό. Να βρεθεί το ελάχιστο m για το οποίο μπορεί να επιτευχθεί αυτό.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός επιλογής για Juniors 2014, Πρόβλημα 2.

33. Έχουμε ένα κουτί με 1007 μαύρες και 1007 άσπρες μπάλες αριθμημένες αυθαίρετα από το 1 ως το 2014. Σε κάθε βήμα παίρνουμε μία μπάλα από το κουτί και την βάζουμε σε ένα τραπέζι. Αφού το κάνουμε αυτό, αν θέλουμε, μπορούμε να πάρουμε δυο μπάλες από το τραπέζι διαφορετικού χρώματος και να τις βάλουμε σε ένα άλλο κουτί. Αν το κάνουμε αυτό τότε κερδίζουμε βαθμούς ίσους με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών των δύο μπαλών.

    Πόσους πόντους μπορούμε να εγγυηθούμε πως θα κερδίσουμε στα σίγουρα μετά από 2014 βήματα;

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Τουρκία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος, Πρόβλημα 1.

34. Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων $(a_1, \ldots, a_{2014})$ του $(1, 2, \ldots, 2014)$ με την ιδιότητα $i + a_i \leqslant j + a_j$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2014$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.

35. Ο Αντρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιγνίδι: Υπάρχουν 100 μπλε μπάλες σε ένα κόκκινο κουτί και 100 κόκκινες μπάλες σε ένα μπλε κουτί. Σε κάθε του κίνηση ένας παίκτης μπορεί να κάνει μία από τις εξής κινήσεις:

    (α) Να αφαιρέσει δυο κόκκινες μπάλες από το μπλε κουτί και να τις βάλει στο κόκκινο.

    (β) Να αφαιρέσει δυο μπλε μπάλες από το κόκκινο κουτί και να τις βάλει στο μπλε.

(γ) Να αφαιρέσει δυο μπάλες διαφορετικών χρωμάτων από το ίδιο κουτί και να τις πετάξει.

Οι δυο παίκτες ξεκινώντας από τον Αντρέα κινούνται εναλλάξ. Ο παίκτης που πρώτος αφαιρεί την τελευταία κόκκινη μπάλα από το μπλε κουτί ή την τελευταία μπλε από το κόκκινο κουτί κερδίζει.

Να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Διαωνισμός Βαλτικών χωρών 2014, Πρόβλημα 8.

36. Έστω θετικός ακέραιος k. Έχουμε $4k$ πούλια εκ των οποίων τα $2k$ είναι κόκκινα και τα άλλα $2k$ είναι μπλε. Αρχικά τα πούλια τοποθετούνται σε μια σειρά. Σε κάθε βήμα μπορούμε να ανταλλάξουμε ένα αριθμό συνεχόμενων κόκκινων πουλιών με τον ίδιο αριθμό από συνεχόμενα μπλε πούλια. (Π.χ. μπορούμε να μετακινηθούμε από την διάταξη $R\underline{BB}BR\underline{RR}B$ στην διάταξη $RRRBRBBB$. (Όπου με R συμβολίζουμε τα κόκκινα πούλια και με B τα μπλε πούλια.)

Να βρεθεί συναρτήσει του k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός n, ώστε ξεκινώντας από οποιαδήποτε διάταξη να μπορούμε να καταλήξουμε στην διάταξη όπου τα πρώτα $2k$ πούλια είναι κόκκινα, κάνοντας το πολύ n κινήσεις.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Μπένελουξ, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.

37. Έχουμε 16 καρέκλες στην σειρά τις οποίες θέλουμε να βάψουμε κόκκινες και πράσινες ώστε ο αριθμός συνεχόμενων καρεκλών του ιδίου χρώματος να είναι πάντα περιττός. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε;

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 6.

38. Για πόσες μεταθέσεις $p_1, \ldots, p_{30}$ των $1, 2, \ldots, 30$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450;$$

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 7.

39. Σε κάθε κελί ενός 7×5 πίνακα τοποθετούμε ένα αριθμό με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε 2×3 και σε κάθε 3×2 υποπίνακα το άθροισμα των αριθμών να είναι 0.

Ο Πέτρος μπορεί να επιλέξει κάποια κελιά και να μάθει τους αριθμούς που είναι γραμμένους σε αυτά.

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ερωτήσεων που μπορεί να κάνει ώστε να είναι σίγουρος για το άθροισμα όλων των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα.

Βαθμός Δυσκολίας: 2
Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Ο-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 3

40. Ο Πέτρος σημαδεύει κάποια κελιά μιας 5×5 σκακιέρας. Ακολούθως ο Βασίλης τοποθετεί γωνίες τριών κελιών στην σκακιέρα ώστε κάθε γωνία να βρίσκεται πλήρως μέσα στην σκακιέρα και να μην καλύπτουν κοινά κελιά. Στόχος του Βασίλη είναι να καλύψει όλα τα τετραγωνάκια που σημάδεψε ο Πέτρος.

    Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός τετραγώνων που πρέπει να σημαδέψει ο Πέτρος ώστε να μην μπορεί να κερδίσει ο Βασίλης.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Α-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 2

41. Ο Αστυνόμος Σαΐνης έχει 36 πέτρες με βάρη $1, 2, \ldots, 36$ γραμμάρια αντίστοιχα. Ο Δόκτορας Κλάου έχει μια σούπερ γόμα ώστε να μπορεί με μία σταγόνα να συνδέσει δύο από τις πέτρες. (Με δύο σταγόνες μπορεί να συνδέσει τρεις πέτρες κ.ο.κ.) Ο Δόκτορας Κλάου θέλει να συνδέσει κάποιες πέτρες ώστε ο Αστυνόμος Σαΐνης να μην μπορεί να επιλέξει κάποιες από αυτές με συνολικό βάρος 37 γραμμάρια. Εννοείται ότι ο Σαΐνης μπορεί να επιλέξει κάποιες από τις συνδεδεμένες πέτρες αλλά τότε πρέπει να πάρει όλες που έχουν συνδεθεί μεταξύ τους.

    Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σταγόνων που χρειάζεται ο Δόκτορας Κλάου ώστε να επιτύχει τον σκοπό του.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Senior, Ο-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 1.

42. Έχουμε n μαύρα και n άσπρα τετράγωνα ίδιων διαστάσεων στο επίπεδο. Κάθε δύο τετράγωνα διαφορετικού χρώματος έχουν κοινό σημείο. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα σημείο που ανήκει σε τουλάχιστον n τετράγωνα.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2
    Πηγή: Ολυμπιάδα Tuymaada για Seniors 2014, Πρόβλημα 6.

43. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε πύργους σε μια 8×8 σκακιέρα ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχει τουλάχιστον ένα πύργο.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2?
    Πηγή: Ινδία, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής, Πρόβλημα 3.

44. Έχουμε 120 σακούλια με 100 νομίσματα το κάθε ένα. Στο ένα σακούλι όλα τα νομίσματα ζυγίζουν από εννιά γραμμάρια, ενώ στα υπόλοιπα σακούλια τα νομίσματα ζυγίζουν από δέκα γραμμάρια. Επιτρέπεται να επιλέξουμε ένα αριθμό νομισμάτων (όχι απαραίτητα από το ίδιο σακούλι) και να τα

τοποθετήσουμε σε μια ζυγαριά. Η ζυγαριά θα δώσει την ακριβή απάντηση αν το συνολικό βάρος είναι λιγότερο από 1000 γραμμάρια.

Να βρεθεί ο ελάχιστον αριθμός φορών που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ζυγαριά ώστε να εντοπίσουμε το σακούλι με τα νομίσματα των εννιά γραμμαρίων.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+
Πηγή: Αργεντινή, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για την Ολυμπιάδα Cono Sur, Πρόβλημα 6.

45. Δίνεται κανονικό 103-γωνο. 79 κορυφές του χρωματίζονται κόκκινες και οι υπόλοιπες χρωματίζονται μπλε. Έστω A ο αριθμός των ζευγών γειτονικών κόκκινων κορυφών και B ο αριθμός των ζευγών γειτονικών μπλε κορυφών.

    (α) Να βρεθούν όλα τα πιθανά ζεύγη (A, B).

    (β) Να βρεθούν όλοι οι διαφορετικοί χρωματισμοί που δίνουν $B = 14$. Δύο χρωματισμοί θεωρούνται ίδιοι αν και μόνο αν μπορούμε να πάρουμε τον ένα από τον άλλο με χρωματισμό του πολυγώνου.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Βιετνάμ, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

46. Για τον άρτιο θετικό ακέραιο n βάζουμε όλους τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n^2$ στα κελιά μιας $n \times n$ σκακιέρας. (Με κάθε αριθμό να εμφανίζεται από μία ακριβώς φορά και κάθε κελί να περιέχει από ένα αριθμό.) Έστω S_1 το άθροισμα των αριθμών στα μαύρα τετραγωνάκια και S_2 το άθροισμα των αριθμών στα λευκά τετραγωνάκια.

    Να βρεθούν όλα τα n για να είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση ώστε να έχουμε $\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Ελλάδα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

47. Δίνεται μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του $[n]$ με την ιδιότητα $|A \vartriangle B| \geqslant 2$ για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$. Να βρεθούν επίσης όλες οι οικογένειες $\mathcal{F}$ με το μέγιστο δυνατόν μέγεθος.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Ινδία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.

48. Δίνονται 60 σημεία σε ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας 1. Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο X στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του X από τα 60 σημεία να είναι το πολύ 80.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Ισπανία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.

49. Έστω p περιττός πρώτος. Μια p-άδα ακεραίων $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ ονομάζεται καλή αν

    (α) $0 \leqslant a_i \leqslant p - 1$ για κάθε i, (β) το $a_1 + \cdots + a_p$ δεν διαιρείται με το p, και

(γ) το $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_pa_1$ διαιρείται με το p

Να υπολογιστεί ο αριθμός των καλών τριάδων.

Βαθμός Δυσκολίας: 2+
Πηγή: Καναδάς, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

50. Έχουμε n μαθητές. Κάθε μαθητής γνωρίζεις ακριβώς d κορίτσια και ακριβώς d αγόρια. (Η γνωριμία θεωρείται συμμετρική σχέση.) Να βρεθούν όλα τα δυνατά ζεύγη ακεραίων (n, d) για τα οποία αυτό είναι εφικτό.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2014, Πρόβλημα 3.

51. Έστω θετικός ακέραιος n. Ο Δανιήλ και ο Μέρλιν παίζουν το εξής παιγνίδι: Ο Δανιήλ έχει k χαρτιά. Σε κάθε ένα από αυτά τα χαρτιά γράφει στην μια του μεριά κάποιους ακεραίους από το 1 ως το n και στην άλλη του μεριά γράφει τους υπόλοιπους. Ακολούθως τοποθετεί τα χαρτιά πάνω στο τραπέζι. Ο Μέρλιν μπορεί να αναποδογυρίσει όποια από τα χαρτιά θέλει και σκοπός του είναι κάθε αριθμός από το 1 ως το n να φαίνεται σε τουλάχιστον ένα από τα χαρτιά.

    Να βρεθεί το μικρότερο δυνατό k για το οποίο ο Μέρλιν έχει στρατηγική νίκης.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Ολλανδία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για Μαθηματική Ολυμπιάδα Μπένελουξ 2014, Πρόβλημα 5.

52. Έχουμε ένα $3\times3\times3$ κύβο ο οποίος αποτελείτε από $1\times1\times1$ κυβάκια κολλημένα μεταξύ τους. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός από κυβάκια που μπορούμε να αφαιρέσουμε ώστε για τα κυβάκια που θα παραμείνουν

    (α) Η προβολή τους σε όλες τις έδρες του αρχικού κύβου να σχηματίζει ένα 3×3 τετράγωνο.

    (β) Μπορούμε να συνδέσουμε κάθε δυο κυβάκια που παραμένουν με μια ακολουθία από κυβάκια που έχουν παραμείνει ώστε το πρώτο και τελευταίο κυβάκι της ακολουθίας να είναι αυτά τα δύο ενώ κάθε δύο συνεχόμενα κυβάκια να έχουν κοινή έδρα.

    Βαθμός Δυσκολίας: 2+
    Πηγή: Τουρνουά των Πόλεων για Junior, Α-Επίπεδο, Άνοιξη 2014, Πρόβλημα 6

53. Έστω άρτιος θετικός ακέραιος k και διακεκριμένοι πρώτοι $p_1, \ldots, p_k$. Έστω $N = p_1 \cdots p_k$ και έστω a, b θετικοί ακέραιοι με $a, b \leqslant N$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$S_1 = \{d : d|N, a \leqslant d \leqslant b, \text{ και ο } d \text{ έχει άρτιο αριθμό πρώτων διαιρετών}\}$$

και

$$S_2 = \{d | d | N, a \leqslant d \leqslant b, \text{ και ο } d \text{ έχει περιττό αριθμό πρώτων διαιρετών}\}.$$

Να δειχθεί ότι $|S_1| - |S_2| \leqslant \binom{k}{k/2}$.

Βαθμός δυσκολίας: $2*$
Πηγή: Κίνα, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 6.

54. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός μεταθέσεων του $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ ώστε για κάθε δύο στοιχεία a, b αυτού του συνόλου να υπάρχει τουλάχιστον μία μετάθεση ώστε το b να έπεται αμέσως του a.

    Βαθμός δυσκολίας: $2*$
    Πηγή: Ιράν, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4

55. Σε μια χώρα με 36 πόλεις λειτουργούν 5 αεροπορικές εταιρίες. Μεταξύ κάθε δύο πόλεων υπάρχει ακριβώς μια εταιρεία που τις συνδέει με απευθείας πτήσεις δύο κατευθύνσεων. Αν μια εταιρεία συνδέει απευθείας τις πόλεις A και καθώς και τις B και C τότε λέμε ότι η τριάδα $\{A, B, C\}$ είναι κανονικώς συνδεδεμένη. Να βρεθεί το μεγαλύτερο k ώστε όπως και να διαμορφωθούν οι πτήσεις με βάση τα πιο πάνω κριτήρια να υπάρχουν τουλάχιστον k κανονικώς συνδεδεμένες τριάδες.

    Βαθμός δυσκολίας: $2*$
    Πηγή: Τουρκία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος, Πρόβλημα 6.

56. Σε κάποια χώρα υπάρχουν 100 αεροδρόμια. Η εταιρεία «Super-Air» προσφέρει απευθείας πτήσεις (διπλής κατεύθυνσης) μεταξύ κάποιων αεροδρομίων. Η «κίνηση» ενός αεροδρομίου είναι ο αριθμός των άλλων αεροδρομίων προς τα οποία υπάρχει απευθείας πτήση από την «Super-Air».

    Η «Concur-Air» προσφέρει απευθείας πτήση μεταξύ δύο αεροδρομίων αν και μόνο αν το άθροισμα των «κινήσεων» των δύο αεροδρομίων είναι τουλάχιστον 100.

    Γνωρίζουμε ότι η «Concur-Air» μπορεί να προσφέρει ένα αεροπορικό γύρο περνώντας από όλα τα αεροδρόμια ακριβώς από μία φορά. Να δειχθεί ότι το ίδιο μπορεί να κάνει και η «Super-Air»

    Βαθμός δυσκολίας: $2*$
    Πηγή: Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 10.

57. Σε ένα νησί υπάρχουν n κάστρα. Κάθε κάστρο ανήκει είτε στην χώρα A είτε στην χώρα B. Σε κάθε κάστρο υπάρχει ακριβώς ένας διοικητής ο οποίος κατάγεται από την χώρα στην οποία ανήκει τα κάστρο. Μεταξύ κάποιων από τα κάστρα υπάρχουν δρόμοι. (Πιθανώς να υπάρχουν και δρόμοι μεταξύ κάστρων σε διαφορετικές χώρες.) Θα λέμε ότι δυο κάστρα είναι γειτονικά αν υπάρχουν δρόμοι που τα ενώνουν απευθείας. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Αν κάποιοι διοικητές από την χώρα B αποφασίσουν να επιτεθούν σε κάποια κάστρα της χώρας A, ώστε κάθε διοικητής να επιτίθεται σε ακριβώς ένα γειτονικό του κάστρο, τότε υπάρχουν διοικητές στην χώρα A που μπορούν είτε να μείνουν στα κάστρα τους είτε να μετακινηθούν σε γειτονικά κάστρα ώστε σε κάθε κάστρο της χώρας A ο αριθμός των αμυνομένων διοικητών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των επιτιθεμένων διοικητών.

(2) Για κάθε υποσύνολο X από κάστρα της χώρας A, ο αριθμός των κάστρων στην χώρα A που είτε ανήκουν στο X είτε είναι γειτονικά με κάποιο κάστρο στο σύνολο X είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των κάστρων στην χώρα B τα οποία είναι γειτονικά με κάποιο κάστρο στην χώρα X.

Βαθμός δυσκολίας: 2∗
Πηγή: Νότιος Κορέα, Τελικός Γύρος 2014, Πρόβλημα 6.

58. Οι ακέραιοι $1, 2, \dots, 9$ είναι γραμμένοι στα κελιά ενός 3×3 πίνακα A. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα θετικό πραγματικό αριθμό x, και μία γραμμή ή μία στήλη ℓ του M, και αλλάζουμε τους αριθμούς από a, b, c που βρίσκονται γραμμένοι στην ℓ με αυτήν την σειρά, είτε σε $a + x, b - x, c - x$, είτε σε $a - x, b - x, c + x$.

(α) Να εξεταστεί αν υπάρχει διαδικασία βημάτων που να κάνει όλα τα στοιχεία του πιο κάτω πίνακα ίσα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(β) Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να υπάρχει ένας πίνακας A όπως πιο πάνω, και μια διαδικασία βημάτων, η οποία να κάνει όλα τα στοιχεία του A ίσα με k.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Αργεντινή, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για την Ολυμπιάδα Cono Sur, Πρόβλημα 2.

59. Στον πίνακα είναι γραμμένο το πολυώνυμο $x^2 + x + 2014$. Ο Κάλβιν και ο Χομπς παίζουν εναλλάξ ξεκινώντας από τον Κάλβιν κάνοντας τις ακόλουθες κινήσεις: Σε κάθε βήμα του ο Κάλβιν επιτρέπεται να προσθέσει ή να αφαιρέσει 1 από τον συντελεστή του x. Σε κάθε βήμα του ο Χομπς επιτρέπεται να προσθέσει ή να αφαιρέσει 1 από τον σταθερό συντελεστή. Ο Κάλβιν κερδίζει αν σε οποιαδήποτε φάση το πολυώνυμο έχει ακέραιες ρίζες. Να δειχθεί ότι ο Κάλβιν έχει στρατηγική νίκης.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Ινδία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

60. Έστω θετικοί ακέραιοι $a_1 < a_2 < \ldots < a_t$ ώστε να μην υπάρχουν τρεις από αυτούς σε αριθμητική πρόοδο. Για $k = t, t+1, \ldots$ ορίζουμε ως a_{k+1} τον μικρότερο θετικό ακέραιο ο οποίος είναι μεγαλύτερος του a_k και ικανοποιεί την συνθήκη ότι δεν υπάρχουν τρεις από τους $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ που να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Για $x \in \mathbb{R}^+$ ορίζουμε ως $A(x)$ τον αριθμό των όρων a_i οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι του x. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c > 1$ και $K > 0$ ώστε $A(x) \geqslant c\sqrt{x}$ για κάθε $x > K$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

61. Δίνονται $n \geqslant 2$ διακεκριμένα σημεία στο επίπεδο. Χρωματίζουμε κόκκινα τα μέσα όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από αυτά τα σημεία. Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός διαφορετικών κόκκινων σημείων.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Μολδαβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.

62. Έστω θετικός ακέραιος m και έστω A, B δύο αλφάβητα σε m και $2m$ γράμματα αντίστοιχα. Έστω επίσης θετικός άρτιος ακέραιος n με $n \geqslant 2m$. Έστω a_n ο αριθμός των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο A όπου όλα τα τα γράμματα εμφανίζονται, και κάθε γράμμα εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών. Τέλος έστω b_n ο αριθμός των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο B όπου κάθε γράμμα εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών. Να υπολογιστεί το $\frac{b_n}{a_n}$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Πέμπτος Διαγωνισμός Επιλογής Ρουμανίας 2014, Πρόβλημα 2.

63. Δίνονται n κελιά αριθμημένα από το 1 ως το n. Αρχικά σε κάθε κελί υπήρχε μία κάρτα με τον αριθμό του κελιού γραμμένο πάνω. Η Άννα όμως άλλαξε τις κάρτες και τώρα στο κελί i υπάρχει η κάρτα με τον αριθμό a_i. Σε κάθε βήμα η Βασιλική επιτρέπεται να ανταλλάξει δύο κάρτες. Αν οι κάρτες έχουν τους αριθμούς x και y τότε το κόστος της αλλαγής είναι $2|x-y|$.

    Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία βημάτων για την Βασιλική με συνολικό κόστος το πολύ

    $$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$$

    ώστε να μπορέσει να επαναφέρει κάθε κάρτα στο σωστό κελί.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 10, Πρόβλημα 3

64. Σε ένα πίνακα είναι γραμμένα τα πολυώνυμα $x^3 - 3x^2 + 5$ και $x^2 - 4x$. Σε κάθε βήμα, αν τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ είναι γραμμένα στον πίνακα, μπορούμε επιπλέον να γράφουμε ένα από τα πολυώνυμα $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x), f(g(x))$ και $cf(x)$ όπου c πραγματικός αριθμός.

    Μπορούμε με μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων να γράφουμε στον πίνακα ένα πολυώνυμο της μορφής $x^n - 1$ για κάποιο θετικό ακέραιο n;

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 7.

65. Ο Ανδρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιγνίδι. Ο Ανδρέας επιλέγει έναν αριθμό μεγαλύτερο του 100. Ο Βασίλης λέει έναν αριθμό μεγαλύτερο του 1. Αν ο αριθμός του Βασίλη διαιρεί τον αριθμό του Ανδρέα τότε ο Βασίλης κερδίζει. Αλλιώς ο Ανδρέας αφαιρεί από τον αριθμό του τον αριθμό του Βασίλη και συνεχίζει με αυτό τον καινούργιο αριθμό. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον Βασίλη να λέει ένα καινούργιο αριθμό κ.ο.κ. Σε κάθε βήμα ο Βασίλης απαγορεύεται να πει ένα αριθμό τον οποίο έχει ήδη πει προηγουμένως.

    Να εξεταστεί αν ο Βασίλης έχει στρατηγική νίκης.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Σαουδική Αραβία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 1.

66. Κάποιοι μπλε και κόκκινοι δίσκοι ίδιου μεγέθους χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν ένα τρίγωνο. Το άνω επίπεδο έχει έναν δίσκο ενώ κάθε άλλο επίπεδο έχει έναν δίσκο περισσότερο από το πρώτο. Κάθε δίσκος εκτός από αυτούς του τελευταίου επιπέδου αγγίζει δύο δίσκους του πιο κάτω επιπέδου και το χρώμα του είναι μπλε αν αυτοί οι δίσκοι έχουν το ίδιο χρώμα, αλλιώς είναι κόκκινος.

    Υποθέτουμε ότι το τελευταίο επίπεδο έχει 2048 δίσκους εκ των οποίων οι 2014 είναι κόκκινοι. Ποιο είναι το χρώμα το δίσκου στην κορυφή;

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Σιγκαπούρη, Δεύτερος Γύρος 2014, Πρόβλημα 3.

67. Έστω $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Για κάθε μη κενό υποσύνολο T του S επιλέγουμε ένα στοιχείο του T ως τον «αντιπρόσωπο» του . Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπρούμε να το κάνουμε αυτό έτσι ώστε αν το $D \subseteq S$ είναι ένωση ξένων μεταξύ τους μη κενών υποσυνόλων A, B, C του S, τότε ο αντιπρόσωπος του D είναι ένας από τους αντιπροσώπους των A, B, C.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Διαγωνισμός Ασίας-Ειρηνικού 2014, Πρόβλημα 2.

68. Για κάποιο θετικό ακέραιο n, δύο παίκτες A και B παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Από ένα σωρό με s πέτρες, παίρνουν εναλλάξ πέτρες με τον A να αρχίζει πρώτος. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού, ο παίκτης παίρνει είτε μία πέτρα, είτε πρώτο αριθμό από πέτρες, είτε έναν αριθμό από πέτρες που είναι θετικό πολλαπλάσιο του n. Νικητής του παιχνιδιού είναι ο παίκτης ο οποίος παίρνει την τελευταία πέτρα. Αν υποθέσουμε ότι οι A και B παίζουν χωρίς να κάνουν λάθη, τότε για πόσες τιμές του s ο παίκτης A δεν μπορεί να νικήσει;

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Juniors, Πρόβλημα 4.

69. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κελιών που μπορούμε να σημειώσουμε σε

μια $n \times n$ σκακιέρα ώστε για κάθε $m > n/2$, και οι δύο διαγώνιοι κάθε $m \times m$ υποσκακιέρας περιέχουν τουλάχιστον ένα σημειωμένο κελί.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Διαγωνισμός Baltic Way 2014, Πρόβλημα 9.

70. Έστω θετικός ακέραιος n. Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Έστω πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_d$ με $a_1 + \cdots + a_d = n$ και $a_i \in [0, 1]$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant d$. Τότε μπορούμε να τους διαμερίσουμε σε k ομάδες (πιθανώς μερικές κενές) έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε ομάδα να είναι το πολύ 1.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: IMO Shortlist Πρόβλημα C1

71. Ένας τρελός φυσικός ανακάλυψε ένα νέο είδος σωματιδίου το οποίο ονόμασε ιμόνιο μετά που μερικά εμφανίστηκαν μυστηριωδώς στο εργαστήριό του. Κάποια ζεύγη από ιμόνια μπορεί να είναι σε κατάσταση διεμπλοκής και κάθε ιμόνιο μπορεί να λάβει μέρος σε πολλές καταστάσεις διεμπλοκής. Ο φυσικός βρήκε ένα τρόπο για να εκτελεί τα ακόλουθα δύο είδη λειτουργιών με αυτά τα σωματίδια, μια όμως λειτουργία ανά φορά:

    (α) Αν κάποιο ιμόνιο είναι σε κατάσταση διεμπλοκής με περιττό αριθμό από άλλα ιμόνια στο εργαστήριο, τότε ο φυσικός μπορεί να το καταστρέψει.

    (β) Σε κάθε στιγμή μπορεί να διπλασιάσει τον αριθμό των ιμονίων στο εργαστήριο δημιουργώντας ένα αντίγραφο I' κάθε ιμονίου I. Κατά την διάρκεια αυτής της λειτουργίας δυο αντίγραφα I' και J' είναι σε κατάσταση διεμπλοκής αν και μόνο αν τα αρχικά ιμόνια I και J είναι σε κατάσταση διεμπλοκής. Κάθε αντίγραφο I' είναι σε κατάσταση διεμπλοκής με το αρχικό ιμόνιο I. Καμία άλλη κατάσταση διεμπλοκής δεν δημιουργείται ή καταστρέφεται με αυτήν την λειτουργία.

    Να δειχθεί ότι ο φυσικός μπορεί με μια ακολουθία τέτοιων λειτουργιών να καταλήξει σε μια οικογένεια ιμονίων ώστε κανένα ζεύγος να μην είναι σε κατάσταση διεμπλοκής.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3
    Πηγή: IMO Shortlist Πρόβλημα C3

72. Θεωρούμε τις αύξουσες ακέραιες ακολουθίες με στοιχεία από το $1, 2, \ldots, 10^6$. Μια τέτοια ακολουθία ονομάζεται Αδριατική αν το πρώτο στοιχείο της είναι 1 και κάθε άλλο στοιχείο της είναι τουλάχιστον διπλάσιο από το προηγούμενο. Μια ακολουθία ονομάζεται Τυρρηνική, αν το τελευταίο στοιχείο της είναι το 10^6 και κάθε στοιχείο της είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των προηγούμενών της στοιχείων.

    Να εξεταστεί αν ο αριθμός των Αδριατικών ακολουθιών είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των Τυρρηνικών ακολουθιών.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Μεσογειακή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 2.

73. Έστω $U = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Για θετικούς ακεραίους a, b, c ορίζουμε με $f(a, b, c)$ τον αριθμό των διατεταγμένων εξάδων $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ και $|X_1| = a$.

(β) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ και $|X_2| = b$.

(γ) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ και $|X_3| = c$.

Να δειχθεί ότι το $f(a, b, c)$ δεν αλλάζει αν μεταθέσουμε τα a, b, c.

Βαθμός Δυσκολίας: 3
Πηγή: Διεθνής Διαγωνισμός Zhautykov 2014, Πρόβλημα 5.

74. Σε κάθε κελί ενός $2m \times 2n$ πίνακα είναι γραμμένος ένας ακέραιος. Ορίζουμε την ακόλουθη πράξη: Επιλέγουμε τρία κελιά που σχηματίζουν σχήμα L και προσθέτουμε 1 σε κάθε ακέραιο κάθε κελιού κελιού του σχήματος L.

Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη σε σχέση με τα m, n και τους αρχικούς αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα ώστε να υπάρχει μια ακολουθία πράξεων που να κάνει όλους τους αριθμούς στον πίνακα ίσους.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+
Πηγή: Βραζιλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6

75. Σε ένα κύκλο είναι γραμμένοι $n \geqslant 1$ πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα $n-1$. Να δειχθεί ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα από αυτούς και να τους αριθμήσουμε ωρολογιακά ως $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έστω ώστε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ να ισχύει ότι $x_1 + \cdots + x_k \geqslant k - 1$

Βαθμός Δυσκολίας: 3+
Πηγή: Μολδαβία, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.

76. Φέρουμε ορισμένες από τις διαγωνίους ενός κυρτού n-γώνου. Ονομάζουμε μια από αυτές τις διαγωνίους καλή αν τέμνει (εσωτερικά του πολυγώνου) ακριβώς μία άλλη από τις διαγωνίους που σχεδιάσαμε. Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός καλών διαγωνίων.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+
Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 3.

77. Ο Αντρέας παίρνει μια κανονική τράπουλα με 52 χαρτιά και τα ανακατεύει. Ακολούθως παίζει το εξής παιγνίδι: Κοιτάζει τα χαρτιά της τράπουλας και κάθε φορά που βρίσκει δύο συνεχόμενα χαρτιά με το ίδιο χρώμα τα αφαιρεί. Συνεχίζει την διαδικασία μέχρι να μην μπορεί να αφαιρέσει άλλα χαρτιά. Ο Αντρέας κερδίζει το παιγνίδι αν καταφέρει να αφαιρέσει όλα τα χαρτιά.

Αν με το αρχικό ανακάτεμα των χαρτιών όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες, να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει το παιγνίδι.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+
Πηγή: Σαουδική Αραβία, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 4.

78. Έστω θετικός ακέραιος n. Έχουμε n κουτιά όπου κάθε κουτί περιέχει ένα μη αρνητικό ακέραιο αριθμό από μπάλες. Σε κάθε κίνηση επιτρέπεται να επιλέξουμε δυο μπάλες από ένα κουτί, να πετάξουμε μια από τις μπάλες, και να βάλουμε την άλλη μπάλα σε κάποιο άλλο κουτί.

    Μια αρχική διάταξη των μπαλών ονομάζεται επιλύσιμη αν μπορούμε μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων (πιθανώς και μηδέν κινήσεων) να φτάσουμε σε μια διάταξη όπου κάθε κουτί έχει τουλάχιστον μια μπάλα.

    Να βρεθούν όλες οι διατάξεις οι οποίες δεν είναι επιλύσιμες αλλά αν προσθέσουμε μια επιπρόσθετη μπάλα σε οποιοδήποτε κουτί τότε γίνεται επιλύσιμη.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3+
    Πηγή: Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα Κοριτσιών 2014, Πρόβλημα 5.

79. Έχουμε N νομίσματα σε ένα τραπέζι εκ των οποίων τα $N-1$ είναι αυθεντικά και το άλλο είναι κάλπικο διαφέροντας μόνο ως προς το βάρος.

    Χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά η οποία συγκρίνει βάρη. Θέλουμε με αυτή να βρούμε το κάλπικο νόμισμα και επιπλέον να βρούμε αν είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα αυθεντικά.

    Μπορούμε να κάνουμε οσαδήποτε ζυγίσματα θέλουμε αλλά έχουμε την επιπλέον συνθήκη ότι αν σε οποιαδήποτε φάση της διαδικασίας διαπιστώσουμε ότι κάποια νομίσματα είναι αυθεντικά τότε απαγορεύεται να τα χρησιμοποιήσουμε σε οποιεσδήποτε άλλες ζυγίσεις.

    Να βρεθούν όλα τα N για τα οποία αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3+
    Πηγή: Ιβηροαμερικάνικη Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.

80. Έστω θετικός ακέραιος n και υποσύνολο A του $\{1, \cdots, n\}$. Μια A-διαμέριση του n σε k μέρη είναι μια αναπαράσταση του n ως άθροισμα $n = a_1 + \cdots + a_k$, όπου τα μέρη $a_1, \cdots, a_k$ ανήκουν στο A και δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά.

    Ονομάζουμε μια A-διαμέριση του n σε k μέρη βέλτιστη αν δεν υπάρχει A-διαμέριση του n σε r μέρη με $r < k$.

    Να δειχθεί ότι κάθε βέλτιστη A-διαμέριση του n περιέχει το πολύ $\sqrt[3]{6n}$ διαφορετικά μέρη.

    Βαθμός Δυσκολίας: 3+
    Πηγή: IMO Shortlist 2013, Πρόβλημα C4.

81. Δίνονται 100 θετικοί ακέραιοι. Ονομάζουμε ένα ζεύγος καλό αν το πηλίκο τον δύο αριθμών ισούται με 2 ή 3. Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός καλών ζευγών που μπορούμε να έχουμε.

Βαθμός Δυσκολίας: 3+
Πηγή: Διεθνής Διαγωνισμός Zhautykov 2014, Πρόβλημα 3.

82. Έστω θετικός ακέραιος $N > 2$. Ο Αντρέας και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιγνίδι: Αρχικά υπάρχουν N νομίσματα σε ένα τραπέζι. Ο Αντρέας παίζει πρώτος και αφαιρεί k νομίσματα από το τραπέζι όπου $1 \leqslant k < N$. Μετά ο Βασίλης αφαιρεί m νομίσματα όπου $1 \leqslant m \leqslant 2k$ κ.ο.κ, δηλαδή κάθε παίκτης στην σειρά του αφαιρεί τουλάχιστον ένα και το πολύ διπλάσιο αριθμό νομισμάτων από ότι αφαίρεσε ο προηγούμενος παίκτης. Ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο νόμισμα κερδίζει.

    Για κάθε τιμή του N, να βρεθεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης και να περιγραφεί η στρατηγική του.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Βραζιλία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 3.

83. Έστω θετικός ακέραιος n και έστω μια $2n \times 2n$ σκακιέρα. Τοποθετούμε $1 \times n$ και $n \times 1$ κομμάτια στην σκακιέρα χωρίς οποιεσδήποτε επικαλύψεις. Μια τέτοια διαρρύθμιση ονομάζεται μέγιστη, αν δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε άλλο τέτοιο κομμάτι στην σκακιέρα χωρίς να επικαλύπτει τα προηγούμενα.

    Να βρεθεί το ελάχιστο k έτσι ώστε να υπάρχει μέγιστη διαρρύθμιση που να χρησιμοποιεί k κομμάτια.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Βραζιλία, Διαγωνισμός Ολυμπιακής Εκδίκησης 2014, Πρόβλημα 3.

84. Έστω άρτιος ακέραιος n και έστω γράφημα G με n κορυφές και ακριβώς $n^2/4$ ακμές. Ονομάζουμε ένα ζεύγος διακεκριμένων κορυφών $\{u, v\}$ φιλικό αν υπάρχει κορυφή z ώστε οι uz, vz να είναι ακμές του G.

    Να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2\binom{n/2}{2}$ φιλικά ζεύγη.

    Πηγή: Ηνωμένες Πολιτείες, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 3

85. Έστω $n \geqslant 0$ και ένας $(2n + 1) \times (2n + 1)$ πίνακας τα κελιά του οποίου χρωματίζονται άσπρα ή μαύρα. Ονομάζουμε ένα κελί ξεχωριστό αν στην σειρά του υπάρχουν τουλάχιστον άλλα n κελιά του ιδίου χρώματος και στην στήλη του υπάρχουν τουλάχιστον άλλα n κελιά του ιδίου χρώματος.

    (α) Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2n + 1$ ξεχωριστά κελιά.

    (β) Να βρείτε κατασκευή όπου υπάρχουν το πολύ $4n$ ξεχωριστά κελιά.

    (γ) Να βρείτε συναρτήσει του n τον ελάχιστο αριθμό ξεχωριστών κελιών.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Ιταλία Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 6.

86. Υπάρχουν 30 μαθητές, έτσι ώστε κάθε ένας από αυτούς έχει το πολύ 5 φίλους και για κάθε πεντάδα μαθητών υπάρχουν δυο μαθητές που δεν είναι φίλοι. Βρείτε το μέγιστο k, έτσι ώστε για κάθε πιθανό σχηματισμό, υπάρχουν k μαθητές που δεν είναι φίλοι μεταξύ τους.

Βαθμός Δυσκολίας: 4
Πηγή: Κίνα, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015, Πρόβλημα 5.

87. Σε μια χώρα με n πόλεις, υπάρχει σιδηρόδρομος που ενώνει κάθε δύο πόλεις μεταξύ τους και προς τις δύο κατευθύνσεις. Οι τιμές των εισιτηρίων είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους με μόνες εξαιρέσεις ότι για κάθε δυο πόλεις A και B η τιμή του εισιτηρίου από την A στην B είναι ίδια με την τιμή του εισιτηρίου από την B στην A.

    Να δειχθεί ότι ένας ταξιδιώτης μπορεί να επιλέξει την αρχική του πόλη και να κάνει $n-1$ διαδοχικά ταξίδια με τραίνο με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε εισιτήριο να είναι φθηνότερο του προηγουμένου.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 9, Πρόβλημα 8.

88. Θετικοί ακέραιοι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (με $n \geq 4$) επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ να είναι

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i$$

    όπου k_i ακέραιος και $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$. Να δειχθεί ότι

$$2n \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n.$$

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Ταϊβάν, Τρίτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Quiz 3, Πρόβλημα 1

89. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν ένα παιγνίδι σε ένα πλήρες γράφημα G με 2014 κορυφές. Παίζουν εναλλάξ με την Αλίκη να ξεκινά. Σε κάθε κίνηση η Αλίκη κατευθύνει μια μη κατευθυνόμενη ακμή του G ενώ ο Βασίλης επιλέγει ένα $m \in [1000]$ και κατευθύνει m μη κατευθυνόμενες ακμές του G. Το παιγνίδι τελειώνει όταν όλες οι ακμές κατευθυνθούν.

    Η Αλίκη κερδίζει αν υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος, αλλιώς κερδίζει ο Βασίλης. Να εξεταστεί ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Τουρκία, Διαγωνισμός Επιλογής 2014 για Junior, Πρόβλημα 8.

90. Έστω θετικός ακέραιος $k > 2$. Δυο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιγνίδι: Αρχικά ένας ακέραιος $n \geqslant k$ είναι γραμμένος στον πίνακα. Ξεκινώντας από τον A οι δυο παίκτες παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε του κίνηση ένας παίκτης σβήνει τον αριθμό m που είναι γραμμένος εκείνη την στιγμή στον πίνακα και τον αντικαθιστά με τον αριθμό m' για κάποιο $k \leqslant m' < m$ με $(m, m') = 1$. Ο πρώτος παίκτης που δεν μπορεί να κινηθεί χάνει.

    Αν αρχικά στον πίνακα είναι γραμμένος ο n τότε ονομάζουμε τον n καλό αν ο B έχει στρατηγική νίκης και κακό αν όχι.

Έστω δυο ακέραιοι $n, n' \geqslant k$ με την ιδιότητα αν $p \leqslant k$ πρώτος τότε $p|n$ αν και μόνο αν $p|n'$. Να δειχθεί ότι είτε οι n, n' είναι και οι δύο καλοί είτε και οι δύο κακοί.

Βαθμός Δυσκολίας: 4
Πηγή: IMO Shortlist Πρόβλημα N5

91. Έστω $n \geqslant 3$ και έστω μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του $S = \{1, 2, ..., n\}$. Μια επιτρεπτή κίνηση είναι η επιλογή δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων A, B της $\mathcal{F}$ και η πρόσθεση στο $\mathcal{F}$ του συνόλου $A \cup B$ (χωρίς την αφαίρεση των A και B).

    Αρχικά η F περιέχει όλα τα μονοσύνολα του S. Ο στόχος είναι να περιέχει όλα σύνολα με $n-1$ στοιχεία του S.

    Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός επιτρεπτών κινήσεων ώστε να επιτευχθεί ο στόχος.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Διαγωνισμός Cono Sur 2014, Πρόβλημα 6.

92. Μια πόλη έχει 2014 κατοίκους, έσω τους $A_1, A_2, \ldots, A_{2014}$. Σε κάθε δεδομένη στιγμή, κάθε ένας από αυτούς είναι είτε ευτυχισμένος, είτε δυστυχισμένος. Κάθε άτομο αλλάζει από ευτυχισμένος σε δυστυχισμένος ή από δυστυχισμένος σε ευτυχισμένο αν κάποιος ευτυχισμένος του χαμογελάσει. Την Δευτέρα το πρωί είχαμε N ευτυχισμένα άτομα.

    Κατά την διάρκεια της Δευτέρας ο A_1 χαμογέλασε του A_2, μετά ο A_2 του A_3, κ.τ.λ. και τελικά ο A_{2013} του A_{2014}. Εκτός από αυτά κανένας άλλος δεν χαμογέλασε σε κάποιον άλλο. Ακριβώς το ίδιο συνέβηκε και την Τρίτη, την Τετάρτη και την Πέμπτη. Την Πέμπτη το βράδυ είχαμε ακριβώς 2000 ευτυχισμένα άτομα.

    Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του N.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4
    Πηγή: Μεσοευρωπαική Ομαδική Ολυμπιάδα 2014, Πρόβλημα 4.

93. Τα μέλη μιας κοινωνίας έχουν χωριστεί σε ορισμένες ομάδες, οι οποίες αλλάζουν με έναν ιδιαίτερο τρόπο κάθε Σαββατοκύριακο: Σε κάθε ομάδα, ένα από τα μέλη ορίζεται ως το καλύτερο μέλος, και τα καλύτερα μέλη όλων των ομάδων φεύγουν από την προηγούμενή τους ομάδα και σχηματίζουν μια νέα ομάδα. Αν μια ομάδα έχει μόνο ένα μέλος, το μέλος αυτό πηγαίνει στη νέα ομάδα και η προηγούμενη ομάδα διαγράφεται. Αρχικά η κοινωνία έχει n μέλη με όλα τα μέλη της να ανήκουν στην ίδια ομάδα.

    Αποδείξτε ότι θα έρθει μια εβδομάδα, μετά την οποία ο αριθμός των μελών κάθε ομάδας θα είναι το πολύ $1 + \sqrt{2n}$.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4+
    Πηγή: Ιράν, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014, Δεύτερος Γύρος , Πρόβλημα 6.

94. Έστω θετικός ακέραιος $n \geqslant 2$. Γεμίζουμε τα κελιά ενός $n \times n$ πίνακα χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n^2$ από μία φορά τον κάθε ένα. Δύο κελιά ονομάζονται γειτονικά αν έχουν κοινή πλευρά. Γνωρίζουμε ότι για κάθε δυο γειτονικά κελιά οι αριθμοί που περιέχουν διαφέρουν τουλάχιστον κατά n. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας 2×2 πίνακας γειτονικών κελιών έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στις δυο διαγωνίους αυτού του πίνακα να είναι το ίδιο.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4+
    Πηγή: Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 6.

95. Να βρεθεί η μικρότερη σταθερά c ώστε για κάθε γράφημα $G = G(V, E)$ με $|E| \geqslant c|V|$, το G να περιέχει δύο ξένους μεταξύ τους κύκλους με τουλάχιστον ένα κύκλο να περιέχει τουλάχιστον μία χορδή.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4+
    Πηγή: Κίνα, Δεύτερος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

96. Σε κάθε τετραγωνάκι ενός 2014×2014 πίνακα τοποθετούμε μια λάμπα. Σε μια αρχική κατανομή, κάποιες από τις λάμπες είναι αναμμένες και κάποιες σβηστές. Μια κίνηση αποτελείται από μια επιλογή γραμμής ή στήλης η οποία περιέχει τουλάχιστον 1007 αναμμένες λάμπες και την αλλαγή όλων των 2014 λαμπών αυτήν της γραμμής/στήλης από αναμμένες σε σβηστές και ανάποδα.

    Να βρεθεί ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος k έτσι ώστε από οποιαδήποτε αρχική κατανομή να υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός κινήσεων που καταλήγει σε μια κατανομή με το πολύ k αναμμένες λάμπες.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4+
    Πηγή: Ολλανδία, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 5.

97. Έχουμε n χαρτιά. Για κάθε δύο χαρτιά ξέρουμε ποιο κερδίζει το άλλο. Μπορεί να συμβεί ότι υπάρχουν τρία χαρτιά A, B, C ώστε το A να κερδίζει το B, το B να κερδίζει το C, αλλά το C να κερδίζει το A.

    Αρχικά τα χαρτιά μοιράζονται στους δυο παίκτες με αυθαίρετο τρόπο. Σε κάθε κίνηση οι δυο παίκτες παίρνουν το πρώτο χαρτί από την στοίβα τους και τα συγκρίνουν. Αυτός που έχει το χαρτί που κερδίζει παίρνει τα δύο χαρτιά και τα τοποθετεί τελευταία στην στοίβα του με όποια σειρά θέλει.

    Να δειχθεί ότι υπάρχει τρόπος ώστε μετά από ορισμένο αριθμό κινήσεων ένας παίκτης να πάρει όλα τα χαρτιά.

    Βαθμός Δυσκολίας: 4+
    Πηγή: Ρωσία, Μαθηματική Ολυμπιάδα 2014 για Grade 11, Πρόβλημα 8.

98. Σε μια χώρα κάποια ζεύγη πόλεων ενώνονται με απευθείας πτήσεις (διπλής κατεύθυνσης). Μπορούμε από κάθε πόλη να πάμε σε κάθε άλλη πόλη με μια ακολουθία τέτοιων πτήσεων. Ορίζουμε την απόσταση δύο πόλεων ως τον ελάχιστο αριθμό πτήσεων που χρειάζονται για να πάμε από την μια πόλη στην άλλη. Γνωρίζουμε ότι για κάθε πόλη υπάρχουν το πολύ 100 πόλεις σε

απόσταση ακριβώς 3 από αυτή. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει καμία πόλη ώστε περισσότερες από 2550 πόλεις να έχουν απόσταση ακριβώς 4 από αυτή.

Βαθμός Δυσκολίας: 4+
IMO Shortlist 2013, Πρόβλημα C6.

99. Έστω θετικοί ακέραιοι k, n. Λέμε ότι ο k είναι n-διακριτός αν υπάρχει ένα σύνολο A από k διαφορετικούς θετικούς ακεραίους, όλους μικρότερους του n, ώστε για κάθε δυο διαφορετικά υποσύνολα U, V του A, το άθροισμα των στοιχείων του U να είναι διάφορο του αθροίσματος των στοιχείων του V.

    (α) Να δειχθεί ότι το 8 είναι 100-διακριτός.

    (β) Να δειχθεί ότι το 9 δεν είναι 100-διακριτός.

    Βαθμός Δυσκολίας: 5
    Πηγή: Διαγωνισμός Ασίας-Ειρηνικού 2014, Πρόβλημα 4.

100. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο από θετικούς αριθμούς και

$$B = \left\{ \frac{a+b}{c+d} : a, b, c, d \in A \right\}.$$

Να δείξτε ότι $|B| \geqslant 2\,|A|^2 - 1$.

Βαθμός Δυσκολίας: 5
Πηγή: Κίνα, Πρώτος Διαγωνισμός Επιλογής 2014, Πρόβλημα 2.