Ασκήσεις συνδυαστικής από όλον τον κόσμο 2012-13

Οι ασκησεις

(1) Το 2013 είναι η πρώτη χρονιά από τον Μεσαίωνα που χρησιμοποιεί τέσσερα συνεχόμενα ψηφία. Να βρεθεί πόσες άλλες τέτοιες χρονιές υπάρχουν μέχρι το 10000.

(2) Μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο $S = \{1, 2, \dots, 21\}$ σε υποσύνολα, ώστε στο κάθε υποσύνολο το μεγαλύτερο στοιχείο να ισούται με το άθροισμα των υπολοίπων;

(3) Στον πίνακα έχουμε γραμμένους τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 25. Σε κάθε βήμα δικαιούμαστε να διαγράψουμε οποιουσδήποτε τρεις αριθμούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα, έστω τους a, b, c, και να γράψουμε τον $a^3 + b^3 + c^3$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να μείνει μόνο ένας αριθμός γραμμένος στον πίνακα.

Να δειχθεί ότι ο τελικός αριθμός δεν μπορεί να ισούται με 2013^3.

(4) Δίνεται ένα τρίγωνο. Να εξεταστεί αν χρησιμοποιώντας ευθύγραμμα τμήματα, μπορεί να διαμεριστεί σε πέντε (μη εκφυλισμένα) ισοσκελή τρίγωνα.

(5) Δύο παίκτες γράφουν εναλλάξ ψηφία πάνω στον πίνακα. Αρχικά ο πίνακας είναι άδειος και σε κάθε βήμα μπορεί να γραφτεί ένα ψηφίο είτε στην αρχή είτε στο τέλος του αριθμού που έχει ήδη σχηματιστεί. Ο δεύτερος παίκτης κερδίζει αν σε οποιαδήποτε φάση μετά από την κίνησή του ο αριθμός που έχει σχηματιστεί είναι τέλειο τετράγωνο.

Να δειχθεί ότι ο πρώτος παίκτης μπορεί να αποτρέψει τον δεύτερο από το να κερδίσει.

(6) Κάποιοι διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι είναι γραμμένοι στον πίνακα. Το άθροισμα κάθε δύο διαφορετικών εξ αυτών είναι δύναμη του 2.

Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός ακεραίων που είναι γραμμένοι στον πίνακα.

(7) Δίνονται μη αρνητικοί πραγματικοί $p_1, \dots, p_n$ και $q_1, \dots, q_n$ ώστε

$$p_1 + \cdots + p_n = q_1 + \cdots + q_n.$$

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία ώστε το άθροισμα της i γραμμής να ισούται με p_i και αυτό της j στήλης να ισούται με q_j.

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A.

(8) Στον πίνακα είναι γραμμένος ένας αριθμός A. Σε κάθε βήμα μπορούμε είτε να προσθέσουμε 9 στον αριθμό που είναι γραμμένος στον πίνακα, είτε να διαγράψουμε το ψηφίο 1 από οποιαδήποτε θέση.

Να εξεταστεί αν μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων μπορούμε να καταλήξουμε στον αριθμό $A + 1$.

(9) Τέσσερα αγόρια και τέσσερα κορίτσια φέρνουν από ένα δώρο, τα οποία και θα ανταλλάξουν. Κάθε αγόρι δίνει στην τύχη το δώρο του σε ένα κορίτσι και κάθε κορίτσι δίνει στην τύχη το δώρο του σε ένα αγόρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο από τα πιο κάτω ενδεχόμενα:

(α) Κάθε παιδί λαμβάνει ακριβώς ένα δώρο.

(β) Δεν υπάρχουν δύο παιδιά που να έχουν ανταλλάξει δώρα μεταξύ τους.

(10) Ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 50\}$ ονομάζεται καλό αν δεν περιέχει κανένα ζεύγος τις μορφής $\{x, 3x\}$. Ένα καλό υποσύνολο ονομάζεται εξαιρετικό αν επιπλέον έχει τον μέγιστο δυνατό αριθμό στοιχείων. Να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων ενός εξαιρετικού συνόλου καθώς και πόσα εξαιρετικά σύνολα υπάρχουν.

(11) Να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός αριθμός k ώστε να ισχύει το ακόλουθο: Σε ένα σκακιστικό τουρνουά με 24 άτομα μπορούν να διοργανωθούν οι αγώνες με τέτοιο τρόπο ώστε

(α) Κάθε δύο άτομα παίζουν μεταξύ τους από 2 έως k φορές.

(β) Κάθε δύο άτομα έχουν παίξει συνολικά διαφορετικό αριθμό αγώνων.

(12) Σε ένα κυκλικό τραπέζι κάθονται 2013 άτομα $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$ με αυτήν την σειρά ωρολογιακά. Στην αρχή του παιγνιδιού δίνουμε σε κάθε άτομο ένα ορισμένο αριθμό νομισμάτων (ίσως και κανένα νόμισμα). Συνολικά διαμοιράζουμε 10000 νομίσματα. Ξεκινώντας από τον P_1 και προχωρώντας ωρολογιακά, ο P_i κάνει το εξής όποτε έρχεται η σειρά του: Αν έχει άρτιο αριθμό νομισμάτων τα δίνει όλα στον P_{i+1}, ενώ αν έχει περιττό αριθμό νομισμάτων δίνει περιττό αριθμό νομισμάτων στον P_{i+1}.

Να δειχθεί ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων θα υπάρχει άτομο που θα έχει όλα τα νομίσματα.

(13) Έστω ένας $n \times n \times n$ κύβος. Κάποια από τα $1 \times 1 \times 1$ κυβάκια που απαρτίζουν τον κύβο είναι χρωματισμένα μαύρα και τα υπόλοιπα άσπρα. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε λωρίδα $1 \times 1 \times n, 1 \times n \times 1$ και $n \times 1 \times 1$ από κυβάκια, ακριβώς 2 εξ αυτών είναι μαύρα, και επιπλέον, ενδιάμεσά σε αυτά τα μαύρα κυβάκια υπάρχει άρτιος αριθμός από άσπρα κυβάκια.

Να δειχθεί ότι μπορούμε να χρωματίσουμε τα μισά από τα μαύρα κυβάκια σε άσπρα ώστε κάθε λωρίδα $1 \times 1 \times n, 1 \times n \times 1$ και $n \times 1 \times 1$ να περιέχει ακριβώς ένα μαύρο κυβάκι.

(14) Σε μια 8×8 σκακιέρα υπάρχουν 8 πύργοι οι οποίοι δεν απειλούνται μεταξύ τους. Διαμερίζουμε τα τετραγωνάκια στους πύργους ως εξής: Δίνουμε κάθε τετραγωνάκι στον κοντινότερο πύργο ο οποίος το απειλεί. Αν υπάρχουν δύο τέτοιοι πύργοι τότε δίνουμε από μισό τετραγωνάκι σε κάθε πύργο.

Να δειχθεί ότι με αυτόν τον διαμερισμό, σε κάθε πύργο έχει δοθεί ίσος αριθμός από τετραγωνάκια.

(15) Έστω φυσικός n και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποδιαστημάτων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με την εξής ιδιότητα: Αν $I_1 = [a_1, b_1]$ και $I_2 = [a_2, b_2]$ με $I_1 \subseteq I_2$ τότε είτε $a_1 = a_2$ είτε $b_1 = b_2$. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(16) Έστω ένα υποσύνολο A του $\{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$ με $|A| = 101$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{|x-y| : x, y \in A$ με $x \neq y\}$ περιέχει τουλάχιστον 10 αριθμούς μικρότερους ή ίσους του 100.

(17) Να εξεταστεί αν μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς από το 1 ως το 100 στις κορυφές κανονικού 100-γώνου, έτσι ώστε σε διαδοχικές κορυφές η απόλυτη τιμή τις διαφοράς των αριθμών να είναι μεταξύ του 30 και του 50.

(18) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των διατεταγμένων πεντάδων (a, b, c, d, e) θετικών ακεραίων, οι οποίες αποτελούν λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$$

είναι περιττός.

(19) Ο Άγιος Βασίλης έχει τουλάχιστον n δώρα, τα οποία θέλει να μοιράσει σε n παιδιά. Γνωρίζουμε ότι το για το παιδί i, ακριβώς $x_i > 0$ από τα δώρα είναι της αρεσκείας του. Αν

$$\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n} \leqslant 1,$$

να δειχθεί ότι κάθε παιδί μπορεί να πάρει ένα δώρο της αρεσκείας του.

(20) Ένα αγόρι και ένα κορίτσι κάθονται σε ένα παγκάκι. Είκοσι άλλα παιδιά κάθονται διαδοχικά στο παγκάκι, με κάθε ένα να κάθεται μεταξύ δύο παιδιών που ήδη κάθονται στο παγκάκι. Ονομάζουμε ένα αγόρι γενναίο αν κάτσει μεταξύ δυο κοριτσιών και ένα κορίτσι γενναίο αν κάτσει μεταξύ δυο αγοριών.

Όταν κάθισαν όλα τα παιδιά παρατηρήσαμε ότι τα κορίτσια και τα αγόρια κάθονταν εναλλάξ. Να εξεταστεί αν μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των γενναίων παιδιών.

(21) Σε κάθε μια από 100 πέτρες υπάρχει ένα αυτοκόλλητο που γράφει το βάρος της. Όλες οι πέτρες έχουν διαφορετικά βάρη. Ο Δημήτρης θέλει να αλλάξει μεταξύ τους τα αυτοκόλλητα, έτσι ώστε για κάθε γνήσιο υποσύνολο από πέτρες, το άθροισμα των αριθμών που γράφουν τα αυτοκόλλητά τους να είναι διαφορετικό από το άθροισμα των βαρών τους.

Μπορεί να το επιτύχει;

(22) Η Άννα και η Βασιλική παίζουν το ακόλουθο παιγνίδι: Ξεκινούν με ένα 1×1 τετράγωνο με την Άννα να παίζει πρώτη και μετά να παίζουν εναλλάξ. Σε κάθε βήμα θα υπάρχει ήδη ένα ορθογώνιο και αυτή που παίζει πρέπει να τοποθετήσει δίπλα σε μια από την πλευρά του ένα τετράγωνο, έτσι ώστε να εφαρμόσει στην πλευρά του και να δημιουργήσει ένα νέο ορθογώνιο. Μια παίκτρια κερδίζει αν καταφέρει να κατασκευάσει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν πολλαπλάσιο του 5.

Να εξεταστεί αν κάποια από τις παίκτριες έχει στρατηγική νίκης.

(23) Τα κελιά μιας $n \times n$ σκακιέρας με $n \geqslant 5$ χρωματίζονται μαύρα και άσπρα με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχουν τρία διαδοχικά κελιά του ιδίου χρώματος ούτε οριζόντια, ούτε κάθετα, ούτε διαγώνια. Να δειχθεί ότι σε κάθε 3×3 τετράγωνο, δύο από τα γωνιακά κελιά είναι μαύρα και δύο άσπρα.

(24) Σε μια χώρα με 2013 πόλεις, μεταξύ κάθε δύο πόλεων υπάρχει μονόδρομη πτήση από μία από τις πόλεις στην άλλη. Γνωρίζουμε ότι από κάθε πόλη υπάρχει τουλάχιστον μία αναχώρηση για άλλη πόλη. Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός ακέραιος k, έτσι ώστε

όπως και να διαταχθούν οι πτήσεις, από κάθε πόλη να μπορούμε να φτάσουμε σε τουλάχιστον k άλλες πόλεις μέσω δύο το πολύ πτήσεων.

(25) Έστω ακέραιος $n > 1$ και έστω T_n ο αριθμός των μη κενών υποσυνόλων S του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα ο μέσος όρος των στοιχείων του S να είναι ακέραιος.

Να δειχθεί ότι ο $T_n - n$ είναι άρτιος.

(26) Έστω $n > 2$ ακέραιος. Έχουμε n χάντρες αριθμημένες από το 1 ως το n. Ένα περιδέραιο είναι μια κυκλική διάταξη κάποιων από τις χάντρες, με δυο περιδέραια να θεωρούνται ίδια αν το ένα προκύπτει από το άλλο με περιστροφή. (Αλλά όχι με αναποδογύρισμα.)

Έστω $D_0(n)$ ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις χάντρες ώστε να φτιάξουμε άρτιο αριθμό περιδεραίων με τουλάχιστον τρεις χάντρες το κάθε ένα. Ορίζουμε το $D_1(n)$ αντίστοιχα για τον περιττό αριθμό περιδεραίων.

Να δειχθεί ότι το $n - 1$ διαιρεί το $D_1(n) - D_0(n)$.

(27) Χρωματίζουμε κάθε ακέραιο είτε κόκκινο είτε μπλε. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε σύνολο διαδοχικών ακεραίων, η διαφορά μεταξύ του αριθμού των κόκκινων και του αριθμού των μπλε ακεραίων είναι το πολύ 1000.

Να δειχθεί ότι υπάρχουν 2000 διαδοχικοί ακέραιοι, ώστε οι μισοί να είναι κόκκινοι και οι άλλοι μισοί μπλε.

(28) Σε κάθε έδρα ενός κανονικού εικοσιδωδεκαέδρου (κυρτό πολύεδρο με 12 κορυφές και 20 έδρες κάθε μία εκ των οποίων είναι ισόπλευρο τρίγωνο) έχει γραφτεί ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Ισχύει ότι το άθροισμα των 20 αυτών αριθμών ισούται με 39.

Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο έδρες οι οποίες μοιράζονται κοινή κορυφή και έχουν γραμμένο τον ίδιο αριθμό.

(29) Έχουμε $2n$ πραγματικούς αριθμούς με θετικό άθροισμα γραμμένους στην περιφέρεια ενός κύκλου. Για κάθε ένα από τους αριθμούς υπάρχουν δυο τμήματα με n συνεχόμενους στον κύκλο αριθμούς που ξεκινούν από αυτόν. (Ένα αριστερόστροφο και ένα δεξιόστροφο τμήμα.)

Να δειχθεί ότι για τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς, το άθροισμα των αριθμών τόσο στο ένα όσο και στο άλλο τμήμα από n αριθμούς που ορίζει είναι θετικό.

(30) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός ίππων που μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μία 2013×2013 σκακιέρα ώστε να μην απειλούνται μεταξύ τους.

(31) Μια *αθροιστικά φιλική περιττή διαμέριση* ενός θετικού ακεραίου n είναι μια ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Οι $a_1, \ldots, a_k$ είναι περιττοί θετικοί ακέραιοι.

(β) $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$.

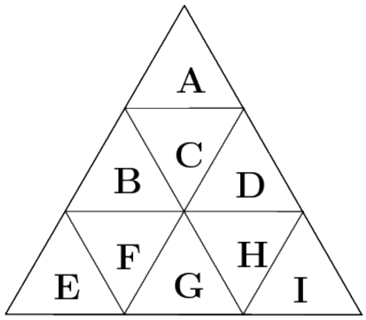
(γ) Κάθε θετικός ακέραιος $m \leqslant n$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα της μορφής $m = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_r}$ όπου $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$. (Δυο αθροίσματα $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_r}$ και $a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_s}$ με $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ και $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ θεωρούνται ίδια αν $r = s$ και $a_{i_\ell} = a_{j_\ell}$ για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant r$.)

Π.χ. το $(1, 1, 3, 3)$ είναι μια αθροιστικά φιλική περιττή διαμέριση του 8.

Να βρεθεί ο αριθμός των αθροιστικά φιλικών περιττών διαμερίσεων του 9999.

(32) Δίνεται ένα τρίγωνο του οποίου οι κορυφές του έχουν ακέραιες συντεταγμένες, και το οποίο έχει ακριβώς δύο εσωτερικά σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. Να δειχθεί ότι η ευθεία που περνάει από αυτά τα εσωτερικά σημεία, είτε περνάει από μια κορυφή, είτε είναι παράλληλη σε μια πλευρά του τριγώνου.

(33) Θεωρούμε το πιο κάτω τρίγωνο το οποίο αποτελείται από 9 τριγωνάκια.



Μια ακολουθία από γράμματα ονομάζεται καλή αν ξεκινάει από το C, τελειώνει στο C, και επιπλέον, διαδοχικά γράμματα ανήκουν σε διαφορετικά τριγωνάκια με κοινή πλευρά.

Να βρεθεί ο αριθμός των καλών ακολουθιών με ακριβώς 2012 γράμματα και ο αριθμός των καλών ακολουθιών με ακριβώς 2013 γράμματα.

(34) Στη βόρεια πλευρά ενός δρόμου υπάρχουν $n \geqslant 2$ σπίτια. Περπατώντας από τα ανατολικά στα δυτικά τα σπίτια είναι αριθμημένα από το 1 έως το n. Μια μέρα οι κάτοικοι αποφασίζουν να κάνουν μια πλάκα στον ταχυδρόμο αλλάζοντας τις πλακέτες με τους αριθμούς των σπιτιών. Για κάθε δύο γειτονικά σπίτια, οι κάτοικοι αλλάζουν τους αριθμούς μεταξύ τους από ακριβώς μία φορά.

Να βρεθεί πόσες διαφορετικές ακολουθίες από αριθμημένες πλακέτες μπορούν να προκύψουν στο τέλος της ημέρας. (Π.χ. για $n = 3$, αν αλλάξουν πλακέτα πρώτα ο 1 με τον 2 και μετά ο 2 με τον 3 θα καταλήξουμε στην 231. Αν αλλάξουν πρώτα ο 2 με τον 3 και μετά ο 1 με τον 2 θα καταλήξουμε στην 312.)

(35) Δίνονται σύνολα $A_1, \ldots, A_{160}$ τέτοια ώστε $|A_i| = i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 160\}$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούργια σύνολα $M_1, \ldots, M_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $A_1, \ldots, A_{160}$ και αφαιρούμε από το καθένα τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των $A_1, \ldots, A_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $M_1, \ldots, M_n$.

Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του n.

(36) Έστω φυσικοί n, k με $n \geqslant k$. Έχουμε n άτομα τα οποία έχουν χωριστεί σε k ομάδες ώστε κάθε ομάδα να έχει τουλάχιστον ένα άτομο.

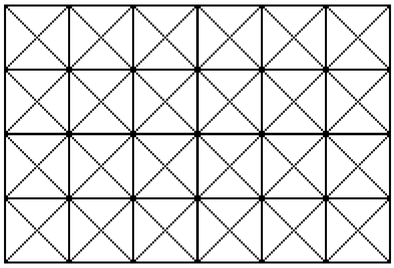
Να δειχθεί ότι μπορούμε να μοιράσουμε n^2 καραμέλες σε αυτά τα άτομα ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(α) Κάθε άτομο παίρνει τουλάχιστον μία καραμέλα,

(β) δυο άτομα που ανήκουν στην ίδια ομάδα παίρνουν τον ίδιο αριθμό από καραμέλες, και

(γ) αν ένα άτομο ανήκει στην i ομάδα και ένα άλλο στην j ομάδα με $i < j$ τότε το άτομο της i ομάδας παίρνει περισσότερες καραμέλες.

(37) Να βρεθεί ο αριθμός των παραλληλογράμμων στο πιο κάτω σχήμα ώστε καμία από τις γωνίες τους να μην είναι ορθή.



(38) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί m, ώστε το $m \times m$ τετράγωνο να μπορεί να διαμεριστεί σε 5 ορθογώνια με πλευρές μήκους $1, 2, \dots, 10$ με κάποια σειρά.

(39) Δίνεται ένα υποσύνολο S του $\{0, 1, 2, \dots, 98\}$ με $m \geqslant 3$, και την ιδιότητα για κάθε $x, y \in S$ να υπάρχει $z \in S$ με $x + y \equiv 2z \bmod 99$.

Να βρεθούν όλες οι πιθανές τιμές του m.

(40) Έστω ένα υποσύνολο A του $\{1, 2, \dots, 2013\}$, έτσι ώστε αν τα a, b, c είναι διακεκριμένα στοιχεία του A, τότε το a ούτε διαιρεί ούτε είναι πολλαπλάσιο του $b - c$.

Να βρεθεί ο μέγιστος δυνατός αριθμός στοιχείων του A.

(41) Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός ακέραιος n με την εξής ιδιότητα: Υπάρχουν δέκα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού, έστω $P_1(x), \dots, P_{10}(x)$, ένας φυσικός k, καθώς και $i_1, \dots, i_{10} \in \{1, 2, \dots, 10\}$, έτσι ώστε τα $P_{i_1}(k+1), P_{i_2}(k+2), \dots, P_{i_n}(k+n)$ να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

(42) Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός ακέραιος n με την εξής ιδιότητα: Υπάρχουν δέκα πολυώνυμα πέμπτου βαθμού, έστω $P_1(x), \dots, P_{10}(x)$, ένας φυσικός k, καθώς και $i_1, \dots, i_{10} \in \{1, 2, \dots, 10\}$, έτσι ώστε τα $P_{i_1}(k+1), P_{i_2}(k+2), \dots, P_{i_n}(k+n)$ να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

(43) Σε ένα χαρτί είναι γραμμένοι 10 διαφορετικοί ακέραιοι. Σε κάθε βήμα παίρνουμε δύο από τους υπάρχοντες αριθμούς, και γράφουμε στο χαρτί το ελάχιστο κοινό

πολλαπλάσιό τους εκτός αν είναι ήδη γραμμένο. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να γράψουμε έναν καινούργιο αριθμό.

Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακεραίων που μπορεί να είναι γραμμένοι στο χαρτί μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας;

(44) Ένας θετικός ακέραιος είναι γραμμένος στον πίνακα. Δυο παίκτες A και B παίζουν το ακόλουθο παιγνίδι: Σε κάθε βήμα αν στον πίνακα είναι γραμμένος ο αριθμός n τότε ο παίκτης που είναι η σειρά του να παίξει επιλέγει ένα διαιρέτη d του n με $1 < d < n$ και αντικαθιστά τον n με τον $n - d$. Αρχικά ξεκινάει να παίζει ο A και μετά παίζουν εναλλάξ. Ο παίκτης που δεν μπορεί να κάνει κάποια κίνηση χάνει.

Για ποιους αριθμούς έχει στρατηγική νίκης ο B;

(45) Σε ένα τραπέζι έχουμε 100 σακούλια από νομίσματα. Δυο παίκτες κινούνται εναλλάξ ως εξής: Σε κάθε κίνηση ο παίκτης δικαιούται να πάρει όσα νομίσματα θέλει με μόνους περιορισμούς ότι πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα νόμισμα και ότι απαγορεύεται να πάρει νομίσματα από όλα τα σακούλια. Ο παίκτης που δεν μπορεί να κινηθεί χάνει.

Να βρεθεί για κάθε αρχική θέση ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(46) Δίνονται n ορθογώνια στο επίπεδο. Να δειχθεί ότι συνολικά καθορίζουν τουλάχιστον $4\sqrt{n}$ διαφορετικές ορθές γωνίες.

(47) Δίνεται ένα συνεκτικό γράφημα G με $\chi(G) \leqslant n + 1$. Να δειχθεί ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε $n(n-1)/2$ ακμές ώστε το γράφημα να παραμείνει συνεκτικό.

(48) Σε μια ομάδα m κοριτσιών και n αγοριών, όλες οι γνωριμίες είναι αμοιβαίες. Για κάθε δύο αγόρια και κάθε δύο κορίτσια, υπάρχει τουλάχιστον ένα αγόρι και ένα κορίτσι τα οποία δεν γνωρίζονται μεταξύ τους.

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μη διατεταγμένων ζευγών της μορφής (αγόρι,κορίτσι) που γνωρίζονται μεταξύ τους δεν υπερβαίνει το $m + \frac{n(n-1)}{2}$.

(49) Κάποια νομίσματα είναι τοποθετημένα σε μια 20×13 σκακιέρα. Δυο νομίσματα ονομάζονται γειτονικά αν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη χωρίς να υπάρχουν άλλα νομίσματα ενδιάμεσα.

Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός νομισμάτων αν κάθε νόμισμα έχει το πολύ δύο γειτονικά νομίσματα.

(50) Σε έναν όμιλο με $2k+1$ μέλη, κάθε μέλος ομιλεί ακριβώς k γλώσσες. Κάθε δυο μέλη μιλούν μεταξύ τους πάντα σε μία συγκεκριμένη γλώσσα. Επιπλέον δεν υπάρχουν τρία μέλη ώστε ανά δύο και τα τρία ζεύγη να μιλούν μεταξύ τους σε ακριβώς την ίδια γλώσσα. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των τριάδων από μέλη ώστε τα τρία ζεύγη να μιλούν μεταξύ τους σε τρεις διαφορετικές γλώσσες.

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατόν πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(51) Δίνονται θετικοί ακέραιοι a, b, και πεπερασμένα σύνολα ακεραίων A, B, με τις εξής ιδιότητες:

(α) $A \cap B = \emptyset$, και

(β) αν $i \in A \cap B$, τότε είτε $i + a \in A$, είτε $i - b \in B$.

Να δειχθεί ότι $a|A| = b|B|$.

(52) Να δειχθεί ότι σε κάθε σύνολο από $\binom{2n}{n}$ άτομα, υπάρχουν $n+1$ άτομα ώστε είτε όλοι να ξέρουν όλους, είτε κανένας να μην ξέρει κανένα.

(53) Έστω n φυσικός και έστω ότι έχουμε

$$a_n = 1 + n!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ αυτών των σημείων χρωματίζεται με ένα από n χρώματα.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τρίγωνο με όλες τις πλευρές του να έχουν το ίδιο χρώμα.

(54) Έστω θετικός ακέραιος $n > 1$. Να κατασκευάσετε άπειρη οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του $\mathbb{N}$, με την εξής ιδιότητα: Κάθε n διακεκριμένα σύνολα του $\mathcal{A}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό στοιχείο, και επιπλέον, κάθε $n+1$ διακεκριμένα σύνολα του $\mathcal{A}$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

(55) Έστω θετικός ακέραιος n και υποσύνολο A στον χώρο με τις εξής ιδιότητες:

(α) Οι συντεταγμένες κάθε στοιχείου του A ανήκουν στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, και

(β) αν τα (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) είναι διαφορετικά στοιχεία του A, τότε ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις ανισότητες $x_1 < x_2, y_1 < y_2, z_1 < z_2$, και τουλάχιστον μία από τις ανισότητες $x_1 > x_2, y_1 > y_2, z_1 > z_2$.

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό πλήθος στοιχείων του A.

(56) Έστω ακέραιος $n \geqslant 2$ και μια ακολουθία $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Ακολουθούμε μια διαδικασία βημάτων, όπου στο βήμα k παίρνουμε ένα από τα υπάρχοντα πολυώνυμα f βαθμού τουλάχιστον 2 και το αντικαθιστούμε με το

$$\frac{f(x) - f(k)}{x - k}.$$

Η διαδικασία σταματά όταν όλα τα πολυώνυμα έχουν βαθμό 1.

Να βρεθούν όλα τα n ώστε ξεκινώντας από τα πολυώνυμα

$$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = x^n + 1,$$

να μπορούμε με μια τέτοια διαδικασία να καταλήξουμε σε n ίσα πολυώνυμα βαθμού 1.

(57) Οι ακέραιοι $1, 2, \ldots, 9$ είναι γραμμένοι στα κελιά ενός 3×3 πίνακα M. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα θετικό πραγματικό αριθμό x, και μία γραμμή ή μία στήλη ℓ του M, και αλλάζουμε τους αριθμούς από a, b, c που βρίσκονται γραμμένοι στην ℓ με αυτήν την σειρά, είτε σε $a + x, b - x, c - x$, είτε σε $a - x, b - x, c + x$.

(α) Για κάθε ένα από τους πιο κάτω πίνακες, να εξεταστεί αν υπάρχει διαδικασία βημάτων που να κάνει όλα τα στοιχεία του ίσα.

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β) Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να υπάρχει ένας πίνακας M όπως πιο πάνω, και μια διαδικασία βημάτων, η οποία να κάνει όλα τα στοιχεία του M ίσα με k.

(58) Μια n-άδα $(w_1, \ldots, w_n)$ φυσικών αριθμών με $w_1 \leqslant \cdots \leqslant w_n$ ονομάζεται τέλεια, αν κάθε φυσικός m με $1 \leqslant m \leqslant w_1 + \cdots + w_n$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $m = w_{i_1} + \cdots + w_{i_k}$ για κάποια $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Να δειχθεί ότι αν η $(w_1, \ldots, w_n)$ είναι τέλεια τότε και η $(w_1, \ldots, w_{n-1})$ είναι τέλεια.

(59) Πεπερασμένος αριθμός θετικών ακεραίων είναι γραμμένοι στην σειρά. Σε κάθε βήμα μπορούμε να κάνουμε το εξής: Αν υπάρχουν δυο συνεχόμενοι αριθμοί x, y με τον x αριστερά του y και $x < y$, τότε μπορούμε να τους σβήσουμε και να γράψουμε στην θέση του y τον x, και στην θέση του x είτε τον $y + 1$, είτε τον $x - 1$.

Να δείξετε ότι όπως και να επιλέξουμε να κάνουμε τα βήματα, η διαδικασία θα τερματιστεί μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

(60) Σε ένα ινστιτούτο σάουνας υπάρχουν n δωμάτια κάθε ένα εκ των οποίων μπορεί να χωρέσει απεριόριστο αριθμό ατόμων. Σε κανένα από τα δωμάτια δεν μπορούν να συνυπάρχουν άνδρες και γυναίκες. Επιπλέον οι άνδρες προτιμούν να μοιράζονται δωμάτια με άνδρες τους οποίους δεν ξέρουν, ενώ οι γυναίκες προτιμούν να μοιράζονται δωμάτια με γυναίκες τις οποίες ξέρουν.

Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε κάθε k ζευγάρια που θα επισκεφθούν το ινστιτούτο ταυτόχρονα, να μπορούν να διαμοιραστούν στα δωμάτια, δεδομένου ότι αν κάποιοι άνδρες γνωρίζονται το ίδιο συμβαίνει και με τις γυναίκες τους και αντιστρόφως.

(61) Γράφουμε σε κάθε ακμή ενός γραφήματος G έναν πραγματικό αριθμό. Έστω ότι για κάθε άρτιο κύκλωμα (δηλαδή άρτια ακολουθία κορυφών ώστε κάθε κορυφή είναι γειτονική με την επόμενη και η τελευταία είναι γειτονική με την αρχική) το άθροισμα των αριθμών στις ακμές του με εναλλασσόμενα πρόσημα ισούται με 0.

Να δειχθεί ότι μπορούμε να γράψουμε πραγματικούς αριθμούς στις κορυφές του G, ώστε ο αριθμός κάθε ακμής να ισούται με το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές της.

(62) Ο παίκτης A τοποθετεί περιττό αριθμό κουτιών γύρω από ένα κύκλο και διαμοιράζει σε αυτά 2013 μπάλες. Ο παίκτης B επιλέγει ένα από τα κουτιά και παίρνει όλες τις μπάλες από μέσα. Έπειτα ο παίκτης A επιλέγει τα μισά από τα υπόλοιπα κουτιά, χωρίς όμως δύο από αυτά να είναι διαδοχικά, και παίρνει όλες τις μπάλες. Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε ο παίκτης A να μπορεί να πάρει σίγουρα k από τις μπάλες. (Τα γειτονικά κουτιά του κουτιού που πήρε τις μπάλες ο B δεν θεωρούνται συνεχόμενα.)

(63) Δυο παίκτες A και B επιλέγουν εναλλάξ, με πρώτον τον A, αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Ακολούθως ο A επιλέγει για κάθε ένα από αυτούς ένα πρόσημο και φτιάχνει έναν από τους αριθμούς $\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_6$. Στόχος του A είναι ο τελικός αριθμός να μην είναι πολλαπλάσιο κανενός από τους $11, 12, \ldots, 18$. Αλλιώς κερδίζει ο B.

Να βρεθεί ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.

(64) Κάποιοι φυσικοί αριθμοί είναι γραμμένοι στην σειρά. Σε κάθε βήμα κάνουμε την ακόλουθη διαδικασία: Για κάθε διαδοχικό ζεύγος από τους αριθμούς, γράφουμε ενδιάμεσα το άθροισμά τους. Να εξεταστεί μετά από 2013 τέτοια βήματα πόσες φορές είναι γραμμένος ο αριθμός 2013 στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Αρχικά είναι γραμμένοι οι αριθμοί $1, 1000$.

(β) Αρχικά είναι γραμμένοι οι αριθμοί $1, 2, 3, \ldots, 1000$.

(65) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί n με την εξής ιδιότητα: Υπάρχει μετάθεση $a_1, \ldots, a_n$ των $1, 2, \ldots, n$ ώστε οι αριθμοί $0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n$ να έχουν όλοι διαφορετικά υπόλοιπα $\mathrm{mod}(n+1)$.

(66) Έστω φυσικοί $a_1, \ldots, a_k$ οι οποίοι ανήκουν στο $[0, 3]$. Για φυσικό $z \in [0, 4^k - 1]$ έστω

$$z = (x_k \cdots x_1)_4$$

το ανάπτυγμα του z στην βάση 4. Δηλαδή $x_1, \ldots, x_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ και

$$z = \sum_{i=1}^{k} x_i 4^{i-1}.$$

Ορίζουμε

$$p(z) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i 4^{i-1}.$$

Να δειχθεί ότι ο αριθμός όλων των z ώστε $z = p(z)$ είναι δύναμη του 2.

(67) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί n για τους οποίους το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ μπορεί να διαμεριστεί σε τριάδες $\{a, b, c\}$ με την ιδιότητα οι αριθμοί $b - a$ και $c - b$ να είναι διαφορετικοί αριθμοί από το σύνολο $\{n-1, n, n+1\}$

(68) Σε μια χώρα υπάρχουν 2014 αεροδρόμια, ανά τρία μη συνευθειακά. Δυο αεροδρόμια ενώνονται με απευθείας πτήσεις αν και μόνο αν η ευθεία που περνά ανάμεσά τους χωρίζει την χώρα σε δύο μέρη που το κάθε ένα περιέχει από 1006 αεροδρόμια.

Να δειχθεί ότι δεν μπορεί να υπάρχουν δύο αεροδρόμια ώστε να μπορούμε να ταξιδέψουμε από το ένα στο άλλο επισκεπτόμενοι όλα τα αεροδρόμια από ακριβώς μία φορά το κάθε ένα.

(69) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός σημείων στο επίπεδο με την εξής ιδιότητα: Τα σημεία είναι ανά τρία μη συνευθειακά και μπορούμε να τα χρωματίσουμε με δυο χρώματα ώστε κάθε μονοχρωματικό τρίγωνο να περιέχει στο εσωτερικό του ένα τουλάχιστον σημείο άλλου χρώματος.

(70) Έστω άρτιος ακέραιος $n \geqslant 4$. Σε κάθε μια από τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου, τοποθετούμε ένα πραγματικό αριθμό με τους n αριθμούς που χρησιμοποιούνται να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Ονομάζουμε επίσης τις ακμές με την φορά των δεικτών του ρολογιού σαν $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ονομάζουμε μια ακμή θετική, αν οι αριθμοί που βρίσκονται στις κορυφές της, με την σειρά των δεικτών του ρολογιού βρίσκονται σε αύξουσα σειρά. Ένα ζεύγος ακμών $\{e_i, e_j\}$ ονομάζεται εναλλάσσων, αν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(α) $2|(i+j)$ και

(β) Αν οι αριθμοί που βρίσκονται στις κορυφές των e_i, e_j είναι οι $a < b < c < d$ σε αύξουσα σειρά, τότε οι a και c είναι οι κορυφές της μίας από τις ακμές, και οι b, d της άλλης.

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των εναλλασσόμενων ζευγών και ο αριθμός των θετικών ακμών έχει διαφορετική ισοτιμία $\mathrm{mod} 2$.

(71) Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}$ όλων των μονοπατιών από το $(0,0)$ στο (n,n) όπου σε κάθε βήμα μπορούμε να μετακινηθούμε κατά μια μονάδα προς τα πάνω ή κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.

Να βρεθεί ο αριθμός των ζευγών $\{P, Q\}$ με $P, Q \in \mathcal{P}$ ώστε τα P, Q να μην έχουν κοινά σημεία πέραν των $(0,0)$ και (n,n).

(72) Έστω θετικός ακέραιος n. Για κάθε θετικό ακέραιο j και κάθε θετικό πραγματικό r ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_j(r)$ και $g_j(r)$ ως

$$f_j(r) = \min(jr, n) + \min\left(\frac{j}{r}, n\right)$$

και

$$g_j(r) = \min(\lceil jr \rceil, n) + \min\left(\left\lceil \frac{j}{r} \right\rceil, n\right).$$

Να δειχθεί ότι

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \leqslant n^2 + n \leqslant \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$$

για κάθε θετικό πραγματικό r.

(73) Θεωρούμε το τρίγωνο του Pascal και επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό που δεν βρίσκεται στην δεξιά πλευρά του τριγώνου. Στην ευθεία αυτού του αριθμού, και ξεκινώντας από δεξιά του, ονομάζουμε τους αριθμούς με την σειρά $a_1, \ldots, a_t$, όπου a_t ο τελευταίος αριθμός και άρα $a_t = 1$. Στην διαγώνιο αυτού του αριθμού που είναι παράλληλη στην αριστερή πλευρά του τριγώνου Pascal, και ξεκινώντας από πάνω από τον αριθμό, ονομάζουμε τους αριθμούς με την σειρά $b_1, \ldots, b_t$, οπότε $b_t = 1$.

Να δειχθεί ότι

$$b_t a_1 - b_{t-1} a_2 + b_{t-2} a_3 - \cdots + (-1)^{t-1} b_1 a_t = 1.$$

(Π.χ. αν επιλέξουμε τον $\binom{4}{1}$ τότε $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 1$ και $b_1 = 3, b_2, b_1 = 1$.)

(74) Έστω θετικός ακέραιος n. Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το εξής παιγνίδι: Η Αλίκη επιλέγει n πραγματικούς αριθμούς, έστω τους $a_1, \ldots, a_n$, όχι απαραίτητα διαφορετικούς μεταξύ τους. Δίνει στον Βασίλη όλα τα $n(n-1)/2$ αθροίσματα της μορφής $a_i + a_j$ για $i \neq j$, όπου δίνει το κάθε άθροισμα με την πολλαπλότητα που εμφανίζεται.

Ο Βασίλης κερδίζει αν μπορεί σίγουρα να μαντέψει τους αρχικούς n αριθμούς που επέλεξε η Αλίκη από την πρώτη του προσπάθεια. Να εξεταστεί αν μπορεί σίγουρα να κερδίσει ο Βασίλης στις ακόλουθες περιπτώσεις

(α) $n = 5$

(β) $n = 6$

(γ) $n = 8$

Π.χ. στην περίπτωση $n = 4$ αν η Αλίκη επιλέξει τους $1, 5, 7, 9$ τότε ο Βασίλης δεν μπορεί σίγουρα να κερδίσει διότι τα ίδια αθροίσματα προκύπτουν και από τους $2, 4, 6, 10$.

(75) Σημειώνουμε n σημεία στην περιφέρεια ενός κύκλου τα οποία και τον χωρίζουν σε n τόξα. Ακολούθως περιστρέφουμε τον κύκλο κατά γωνία $2k\pi/n$ για κάποιο ακέραιο k. Έτσι παίρνουμε n νέα σημεία και n νέα τόξα.

Αν θεωρήσουμε ότι τα άκρα των τόξων ανήκουν και στα δύο από τα τόξα, να δειχθεί ότι ένα από τα νέα τόξα περιέχεται πλήρως σε ένα από τα παλιά τόξα.

(76) Δίνεται ένας $m \times n$ πίνακας. Σε κάθε κελί του πίνακα είναι γραμμένος ένας ακέραιος αριθμός. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε μια γραμμή ή μια στήλη ή μια διαγώνιο της μορφής $D_k = \{(x, y) : x - y = k\}$. Ακολούθως προσθέτουμε 1 η -1 σε όλα τα κελιά του συνόλου που επιλέξαμε.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία βημάτων που μπορεί να αλλάξει όλους τους αριθμούς σε 0 αν και μόνο αν υπάρχει τέτοια ακολουθία βημάτων για κάθε 3×3 υποπίνακα του πίνακα. (Ένας 3×3 υποπίνακας είναι το σύνολο όλων των κελιών που παίρνουμε αν επιλέξουμε τρεις διαδοχικές γραμμές και τρεις διαδοχικές στήλες.)

(77) Έστω θετικός ακέραιος n, και έστω σημεία $P_1, \ldots, P_{4n}$ ανά τρία μη συνευθειακά. Για $i \in \{1, 2, \ldots, 4n\}$, αν περιστρέψουμε την ημιευθεία που ξεκινάει από το P_i και περνάει από το P_{i-1} κατά 90° με την φορά των δεικτών του ρολογιού, θα πάρουμε την ημιευθεία που ξεκινάει από το P_i και περνάει από το P_{i+1}. (Θεωρούμε ότι $P_0 = P_{4n}$ και $P_1 = P_{4n+1}$.)

Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός ζευγών (i, j) με $1 \leqslant i < j \leqslant 4n$ ώστε τα τμήματα P_iP_{i+1} και P_jP_{j+1} να τέμνονται σε εσωτερικά τους σημεία.

(78) Έστω θετικός ακέραιος n και μια $4n \times 4n$ σκακιέρα. Τοποθετούμε σε αυτή ακριβώς $4n$ πούλια ώστε να υπάρχει από ένα πούλι σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Σε κάθε βήμα μετακινούμε ένα πούλι κατά ένα τετράγωνο, είτε οριζόντια είτε κάθετα. Επιτρέπεται δύο ή περισσότερα πούλια να βρεθούν στο ίδιο τετραγωνάκι. Σκοπός μας είναι να μετακινήσουμε όλα τα πούλια ώστε να βρεθούν σε όλα τα τετραγωνάκια της μίας εκ των δύο διαγωνίων.

Να βρεθεί ο μικρότερος αριθμός $k(n)$ ώστε με οποιαδήποτε αρχική διάταξη, ο σκοπός μας να μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας το πολύ $k(n)$ βήματα.

(79) Ένα 55×55 τετράγωνο χωρίζεται σε μικρότερα τετραγωνάκια. Αφαιρούμε από το τετράγωνο 500 μικρά τετραγωνάκια καθώς και 400 «L-σχήματα» αποτελούμενα από τρία τετραγωνάκια το κάθε ένα. (Τα «L-σχήματα» μπορούν να αφαιρεθούν με οποιοδήποτε προσανατολισμό. Π.χ. επιτρέπεται η αφαίρεση και Γ-σχημάτων.)

Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο από τα κομμάτια που έχουν αφαιρεθεί τα οποία έχουν τουλάχιστον μία κοινή πλευρά μεταξύ τους.

(80) Τοποθετούμε βότσαλα σε κάποια μοναδιαία τετράγωνα μιας 2013×2013 σκακιέρας, έτσι ώστε κάθε τετράγωνο να περιέχει το πολύ ένα βότσαλο.

Προσδιορίστε τον ελάχιστο αριθμό βότσαλων στην σκακιέρα, αν κάθε 19×19 τετράγωνο που σχηματίζεται από μοναδιαία τετράγωνα, περιέχει τουλάχιστον 21 βότσαλα.

(81) Δίνεται ένας τετραγωνισμένος πίνακας χωρισμένος σε 999×999 κελιά του οποίου κάποια κελιά είναι χρωματισμένα άσπρα, και τα υπόλοιπα είναι χρωματισμένα κόκκινα. Έστω T ο αριθμός των τριάδων (C_1, C_2, C_3) των κελιών με την εξής ιδιότητα: Τα κελιά C_1, C_2 είναι στην ίδια γραμμή, τα C_2, C_3 στην ίδια στήλη, τα C_1 και C_3 είναι άσπρα, και το C_2 είναι κόκκινο.

Να βρείτε την μέγιστη τιμή του T που μπορούμε να έχουμε.

(82) Έστω κυρτό $(4n-1)$-γωνο. Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να μπορούμε να διαμερίσουμε τις διαγωνίους του σε υποσύνολα $S_1, \ldots, S_k$ με την ιδιότητα για κάθε $1 \leqslant i < j \leqslant k$ να υπάρχει μια διαγώνιος στο S_i και μια στο S_j οι οποίες να τέμνονται στο εσωτερικό του πολυγώνου.

(83) Σε κάθε κορυφή ενός κανονικού $2n$-γώνου τοποθετούμε ένα πούλι. Σε κάθε κίνηση παίρνουμε δυο πούλια που βρίσκονται στην ίδια πλευρά και αλλάζουμε τις θέσεις τους. Μετά από μερικές κινήσεις παρατηρούμε ότι κάθε ζεύγος πουλιών έχουν αλλάξει θέσεις μεταξύ τους ακριβώς μία φορά.

Να δειχθεί ότι υπάρχει μία πλευρά η οποία δεν έχε χρησιμοποιηθεί καθόλου.

(84) Έχουμε $n(n+1)/2$ πούλια τοποθετημένα ώστε να δημιουργούν ισόπλευρο τρίγωνο με τις πλευρές να έχουν από n πούλια η κάθε μία. Τα πούλια έχουν από μια μαύρη και μια άσπρη πλευρά και αρχικά είναι τοποθετημένα με την μαύρη πλευρά. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε μια ευθεία παράλληλη προς μία από τις πλευρές και αντιστρέφουμε όλα τα πούλια. Μια διάταξη από πούλια ονομάζεται επιτρεπτή αν μπορούμε να φτάσουμε σε αυτήν μέσω μιας διαδικασίας βημάτων. Για κάθε αποδεκτή διάταξη C ορίζουμε ως $f(C)$ τον μικρότερο δυνατό αριθμό βημάτων με τον οποίο μπορούμε να καταλήξουμε στην C.

Να βρεθεί το μεγαλύτερο δυνατό $f(C)$.

(85) Δίνεται μια οικογένεια υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ τότε $|B \setminus A| \geqslant 3$.

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό μέγεθος της $\mathcal{A}$.

(86) Έστω $n \geqslant 2$ φυσικός και σύνολα $A_1, \ldots, A_n$ με την ιδιότητα

$$|A_i \vartriangle A_j| = |i - j|$$

για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Όπου $A \vartriangle B$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε ακριβώς ένα από τα A και B.)

Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

(87) Έστω φυσικός n. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό k ώστε να υπάρχουν διατεταγμένα ζεύγη $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ με τα $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ να είναι διακεκριμένα στοιχεία του $\{1, 2, \ldots, n\}$ και με όλα τα $x_i + y_i$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και μικρότερα ή ίσα του n.

(88) Δίνονται μη αρνητικοί ακέραιοι m, n. Στο σκάκι φιλοσόφων, έχουμε μια σκακιέρα η οποία είναι ένα άπειρο πλέγμα από κανονικά εξάγωνα. Υπάρχει επίσης και ένα κομμάτι που ονομάζουμε γαϊδούρι και το οποίο κινείται ως εξής:

Ξεκινώντας από ένα από τα εξάγωνα το γαϊδούρι κινείται m κελιά προς μία από τις 6 κατευθύνσεις. Ακολούθως περιστρέφεται με την φορά των δεικτών του ρολογιού κατά $60°$ και κινείται ακόμη n κελιά προς τη νέα κατεύθυνση μέχρι να φτάσει στο τελικό κελί.

Να βρεθεί το μέγιστο k ώστε να υπάρχουν k κελιά μεταξύ των οποίων δεν μπορεί να μετακινηθεί το γαϊδούρι.

(89) Σε κάθε μία από 16 συνεχόμενες μέρες, κάποιοι από τους 7 νάνους δουλεύουν στο ορυχείο και οι υπόλοιποι μαζεύουν μούρα. Κάθε δύο διαφορετικές μέρες (όχι απαραίτητα συνεχόμενες) υπάρχουν τουλάχιστον τρεις νάνοι που έκαναν διαφορετική εργασία αυτές τις δυο μέρες. Την πρώτη μέρα όλοι οι νάνοι δούλεψαν στο ορυχείο.

Να δειχθεί ότι κάποια από αυτές τις μέρες όλοι οι νάνοι μάζευαν μούρα.

(90) Δυο ταχυδακτυλουργοί εκτελούν το ακόλουθο κόλπο. Αρχικά ο πρώτος ταχυδακτυλουργός κλειδώνει τον δεύτερο σε ένα κασόνι όπου δεν μπορεί ούτε να δει ούτε να ακούσει τίποτα. Ακολούθως επιλέγει ένα άτομο από το κοινό. Αυτό το άτομο τοποθετεί σε κάθε τετράγωνο μιας $n \times n$ σκακιέρας είτε ένα άσπρο είτε ένα μαύρο πιόνι με όποιο τρόπο θέλει. Επιπλέον διαλέγει ένα από τα τετράγωνα, έστω το A, και το δείχνει στον ταχυδακτυλουργό. Μετά ο ταχυδακτυλουργός διαλέγει ένα τετράγωνο, έστω το B, και αλλάζει το χρώμα του πιονιού που βρίσκεται σε αυτό. Μετά ξεκλειδώνει τον δεύτερο ταχυδακτυλουργό από το κουτί, ο οποίος μόλις δει την σκακιέρα αποφαίνεται ποιο ήταν το τετράγωνο A που διάλεξε το άτομο από το κοινό.

Να βρεθούν όλες οι τιμές του n για τις οποίες οι ταχυδακτυλουργοί έχουν στρατηγική νίκης.

(91) Σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό κάποιοι είναι φίλοι και κάποιοι όχι, με την φιλία να είναι αμοιβαία, δηλαδή αν ο A είναι φίλος με τον B τότε και ο B είναι φίλος με τον A.

Λέμε ότι $n \geqslant 3$ διαγωνιζόμενοι $A_1, \ldots, A_n$ αποτελούν ένα ασθενώς φιλικό κύκλο αν ο A_i δεν είναι φίλος με τον A_{i+1} για $1 \leqslant i \leqslant n$ (όπου $A_{n+1} = A_1$) και δεν υπάρχουν άλλα ζεύγη μη φίλων μεταξύ τους.

Η ακόλουθη συνθήκη ικανοποιείται: «Για κάθε διαγωνιζόμενο C και κάθε ασθενώς φιλικό κύκλο S ο οποίος δεν περιέχει τον C, το σύνολο D των διαγωνιζομένων στο S οι οποίοι δεν είναι φίλοι με τον C αποτελείται από το πολύ ένα άτομο.»

Να δειχθεί ότι οι διαγωνιζόμενοι μπορούν να διαμεριστούν σε τρία δωμάτια ώστε σε κάθε δωμάτιο να είναι όλοι φίλοι μεταξύ τους.

(92) Δίνεται θετικός ακέραιος $n \geqslant 3$ και n σημεία στις κορυφές κανονικού n-γώνου. Ονομάζουμε ένα από αυτά A, και τοποθετούμε ένα πούλι στο A. Σε κάθε κίνηση μπορούμε να μετακινήσουμε το πούλι με την φορά των δεικτών του ρολογιού κατά μία ή δύο θέσεις. Έστω a_n ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να κάνουμε δυο πλήρεις περιστροφές του κύκλου ξεκινώντας και τελειώνοντας στο A με την προϋπόθεση ότι από τις $2n$ δυνατές κινήσεις καμία δεν επιτρέπεται να επαναληφθεί.

Να δειχθεί ότι $a_{n-1} + a_n = 2^n$ για κάθε $n \geqslant 4$.

(93) Έστω μια $3n \times 3n$ σκακιέρα της οποίας αριθμούμε τις γραμμές και τις στήλες από το 1 ως το $3n$. Χρωματίζουμε κάθε τετράγωνο (x, y) με ένα από τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε ανάλογα με την ισοτιμία $\mathrm{mod} 3$ του $x + y$. Έχουμε επίσης $9n^2$ πιόνια τα οποία είναι βαμμένα κόκκινα, πράσινα και μπλε με $3n^2$ πιόνια από το κάθε χρώμα. Τα τοποθετούμε αυθαίρετα στην σκακιέρα με ένα πιόνι στο κάθε τετράγωνο. Είναι γνωστό ότι μπορούμε, αν θέλουμε, να μεταθέσουμε τα πιόνια με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε πιόνι να μεταφείθει σε μια θέση σε απόσταση το πολύ d από την αρχική του και επιπλέον κάθε κόκκινο πιόνι να πάει σε θέση όπου βρισκόταν πράσινο πιόνι, κάθε πράσινο σε θέση όπου βρισκόταν μπλε, και κάθε μπλε σε θέση όπου βρισκόταν κόκκινο.

Να δειχθεί ότι μπορούμε επίσης να μεταθέσουμε τα πιόνια ώστε κάθε πιόνι να μεταφέρθει σε μια θέση σε απόσταση το πολύ $d + 2$ από την αρχική του, και επιπλέον να πάει σε τετράγωνο του χρώματός του.

(94) Το «παιχνίδι μαντέματος του ψεύτη» είναι ένα παιχνίδι μεταξύ δύο παιχτών A και B. Οι κανόνες του παιχνιδιού βασίζονται σε δύο θετικούς ακεραίους k και n που είναι γνωστοί και στους δύο παίχτες.

Στην αρχή του παιχνιδιού ο παίκτης A επιλέγει δύο ακέραιους αριθμούς x και N με $1 \leqslant x \leqslant N$. Ο παίκτης A κρατάει τον αριθμό x μυστικό και αποκαλύπτει στον παίκτη B τον αριθμό N. Ο παίκτης B τώρα, προσπαθεί να αποκτήσει πληροφορίες για τον αριθμό x ρωτώντας τον παίκτη A ερωτήσεις ως εξής: Σε κάθε ερώτησή του ο B καθορίζει ένα σύνολο S θετικών ακεραίων (πιθανώς το ίδιο με προηγούμενη ερώτηση), και ρωτάει τον A αν ο x ανήκει σε αυτό το σύνολο. Ο παίκτης B μπορεί να κάνει όσες τέτοιες ερωτήσεις θέλει. Μετά από κάθε ερώτηση, ο παίκτης A πρέπει να απαντήσει αμέσως με ένα «ναι» ή ένα «όχι». Επιτρέπεται να πει ψέματα όσες φορές θέλει με ένα μόνο περιορισμό: μεταξύ κάθε $k+1$ διαδοχικών ερωτήσεων, τουλάχιστον μία απάντηση πρέπει να είναι αληθής.

Εφόσον ο B έχει κάνει όσες ερωτήσεις επιθυμεί, θα πρέπει να ορίσει ένα σύνολο X με το πολύ n θετικούς ακέραιους. Αν ο x ανήκει στο X τότε ο παίκτης B είναι νικητής, ενώ σε διαφορετική περίπτωση χάνει. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν $n \geqslant 2^k$, τότε ο B μπορεί να εγγυηθεί τη νίκη.

(β) Για όλες τις αρκετά μεγάλες τιμές του k, υπάρχει ένας ακέραιος $n \geqslant (1.99)^k$ τέτοιος ώστε ο B δεν μπορεί να εγγυηθεί τη νίκη.

(95) Σε ένα βασίλειο, ο βασιλιάς θέλει να μειώσει τον αριθμό των συμβούλων του που αυτήν την στιγμή αποτελείται από 1000 σοφούς. Τους βάζει σε μια γραμμή και παίρνει 1001 αριθμημένα καπέλα από το 1 ως το 1001. Επιλέγει 1000 από αυτά τα καπέλα και τοποθετεί από ένα καπέλο στο κεφάλι κάθε σοφού. Κάθε σοφός βλέπει τους αριθμούς στα καπέλα των μπροστινών του. Ξεκινώντας από τον τελευταίο σοφό θα προσπαθήσουν όλοι με την σειρά να μαντέψουν τον αριθμό του καπέλου τους. Κάθε σοφός επιτρέπεται να ανακοινώσει ένα μόνο αριθμό ο οποίος να ανήκει σύνολο $\{1, 2, \ldots, 1001\}$. Επιπλέον, απαγορεύεται κάποιος αριθμός να ανακοινωθεί εις διπλούν. Στο τέλος όποιος σοφός δεν μαντέψει σωστά τον αριθμό του καπέλου του εκδιώκεται από το συμβούλιο.

(α) Εξετάστε αν υπάρχει στρατηγική ώστε τουλάχιστον 500 σοφοί να παραμείνουν στο συμβούλιο.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει στρατηγική ώστε τουλάχιστον 999 σοφοί να παραμείνουν στο συμβούλιο.

(96) Έστω ένα συνεκτικό γράφημα G με 100 κορυφές και 2013 ακμές. Γνωρίζουμε ότι η διάμετρος του G είναι μεγαλύτερη του 2. (Δηλαδή υπάρχουν δύο κορυφές x, y ώστε κάθε μονοπάτι μεταξύ των x, y να έχει μήκος μεγαλύτερο του 2.) Να βρεθεί το μέγιστο n ώστε να μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές του G με n χρώματα έτσι ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών να υπάρχει ένα μονοχρωματικό μονοπάτι που να τις ενώνει.

(97) Έστω $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$ και συνάρτηση $f : X \to X$ ώστε

(α) $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in X$, και

(β) για κάθε υποσύνολο A του X με $|A| = 40$, έχουμε $A \cap f(A) \neq \emptyset$.

Να βρεθεί το ελάχιστο k ώστε για κάθε τέτοια συνάρτηση f να υπάρχει ένα υποσύνολο B του X με $|B| = k$, έτσι ώστε $B \cup f(B) = X$.

(98) Για μη κενά σύνολα αριθμών S, T, ορίζουμε τα σύνολα $S+T = \{s+t : s \in S, t \in T\}$ και $2S = \{2s : s \in S\}$. Έστω n ένα θετικός ακέραιος και A, B δύο μη κενά υποσύνολα του $\{1, 2 \ldots, n\}$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο D του $A + B$ τέτοιο ώστε

(α) $D + D \subseteq 2(A + B)$, και

(β) $|D| \geqslant \frac{|A| \cdot |B|}{2n}$.